



MÉMOIRE DE STAGE DE MATHÉMATIQUES DE M2

effectué à l'IMJ-PRG

Valeurs centrales de fonctions L de produits triples

La formule de Gross-Kudla

Brian Flanagan

**Institut de Mathématiques de
Jussieu-Paris Rive Gauche**
Université Paris Cité - Campus Grands
Moulins
8 Place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13

Encadrant à l'IMJ-PRG
Loïc Merel
Bureau 600, bâtiment Sophie Germain
Professeur des universités
Théorie des Nombres

Table des matières

1	Introduction	2
2	Facteurs locaux et équation fonctionnelle	3
2.1	Équation fonctionnelle de la fonction L triple	3
2.2	Facteurs locaux de la fonction zêta	5
2.2.1	Facteurs p -adiques	5
2.2.2	Facteur archimédien	6
2.3	Choix du vecteur test de la fonction zêta	7
2.4	Série d'Eisenstein, opérateur d'entrelacement et équation fonctionnelle	8
2.5	Preuve de l'équation fonctionnelle	10
3	Calcul des facteurs locaux ramifiés de la fonction zêta	11
4	Théorie d'Eichler et module supersingulier	18
4.1	Algèbres de quaternions	18
4.2	Matrices de Brandt et correspondance de Jacquet-Langlands	21
4.3	Courbes elliptiques supersingulières	24
5	L'élément diagonal et la formule de Gross-Kudla	25
5.1	Un premier pas : la formule de Siegel-Weil	25
5.2	L'élément diagonal de Gross et Kudla	33
5.3	La formule de Gross et Kudla	34
	Annexe : quelques calculs d'intégrales sur les corps locaux	35
	Bibliographie	37

1 Introduction

Soit $N > 0$ un entier sans facteur carré et $f, g, h \in S_2(\Gamma_0(N))$ trois formes primitives. On définit la forme modulaire $F = f \otimes g \otimes h$ sur \mathfrak{h}^3 (avec \mathfrak{h} le demi-plan de Poincaré) de poids $(2, 2, 2)$ pour $\Gamma_0(N)^3$ sur \mathfrak{h}^3 par

$$F(z_1, z_2, z_3) = f(z_1)g(z_2)h(z_3).$$

Pour définir la fonction L de F , on écrit les développements de Fourier de f, g, h :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n, \quad g(z) = \sum_{n \geq 1} b_n q^n, \quad h(z) = \sum_{n \geq 1} c_n q^n.$$

Pour l premier ne divisant pas N , notons $\alpha_{l,1}, \alpha_{l,2}$ les paramètres de Satake de f , c'est-à-dire les racines du polynôme $1 - a_l X + lX^2$. On note de même $\beta_{l,1}, \beta_{l,2}$ et $\gamma_{l,1}, \gamma_{l,2}$ les paramètres de Satake de g et h . Pour p premier divisant N , on pose $\varepsilon_p = -a_p b_p c_p = \pm 1$. Remarquons qu'en notant w_p l'involution d'Atkin-Lehner sur $S_2(\Gamma_0(N))$ définie par $f|w_p = f|_2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & -p \end{pmatrix}$, et $u_p = w_p^{\otimes 3}$, on a

$$F|u_p = \varepsilon_p F.$$

En suivant les conventions de [GK92], on note $L(F, s) = \prod_{l|N} L_l(F, s) \prod_{p|N} L_p(F, s)$ la fonction L aux places finies associée à F , avec

- i. $\forall l \nmid N, L_l(F, s) = \prod_{\varphi: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2\}} (1 - \alpha_{l,\varphi(1)} \beta_{l,\varphi(2)} \gamma_{l,\varphi(3)} l^{-s})^{-1}$, de sorte que l'on décrit les 8 produits possibles des paramètres de Satake de f, g, h .
- ii. $\forall p|N, L_p(F, s) = (1 + \varepsilon_p p^{-s})^{-1} (1 - \varepsilon_p p^{1-s})^{-2}$.

En outre, on note $\Lambda(F, s) = L_\infty(F, s)L(F, s)$ la fonction L de F , où

$$L_\infty(F, s) = (2\pi)^{3-4s} \Gamma(s) \Gamma(s-1)^3 = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s-1)^3,$$

avec $\Gamma_{\mathbb{C}} = (2\pi)^{-s} \Gamma(s)$. La série $\Lambda(F, s)$ est absolument convergente pour $\text{Re } s > \frac{5}{2}$.

On détermine ensuite une expression intégrale de $L(F, s)$ en combinant la proposition 2.7 et la proposition 2.20. De cette expression, on déduit le prolongement holomorphe et l'équation fonctionnelle de $L(F, s)$ comme énoncé au théorème 1.1 en ajoutant le facteur local archimédien, par la symétrie $s \leftrightarrow 4 - s$.

Théorème 1.1. *La fonction $\Lambda(F, s)$ admet un prolongement holomorphe en la variable s à tout le plan complexe et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\Lambda(F, s) = -N^{10-5s} \left(\prod_{p|N} \varepsilon_p \right) \Lambda(F, 4-s).$$

On exprime ensuite la valeur centrale de $L(F, s)$ en $s = 2$ au théorème 5.31, comme le produit d'une période

$$\frac{2^{8-t} \pi^5}{N} \int_{\Gamma_0(N)^3 \backslash \mathfrak{h}^3} |F(z_1, z_2, z_3)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

et du carré de la norme de la projection de l'élément diagonale Δ selon F ,

$$\langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3} = \frac{(\sum_i w_i^2 \lambda_i(f) \lambda_i(g) \lambda_i(h))^2}{(\sum_i w_i \lambda_i(f)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(g)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(h)^2)}, \quad (1.2)$$

définie en 5.28, où t est le nombre de diviseurs premiers de N et les $\lambda_i(f), \lambda_i(g), \lambda_i(h)$ sont des réels déterminés à un facteur près par f, g et h via la correspondance de Jacquet-Langlands (explicite ici par les méthodes d'Eichler, voir la partie 4.2), indexés par les classes à gauches de R . Il est à noter que si les $\lambda_i(f), \lambda_i(g), \lambda_i(h)$ sont déterminés à un scalaire près, la quantité 1.2 ne l'est pas.

La quantité

$$\sum_i w_i^2 \lambda_i(f) \lambda_i(g) \lambda_i(h)$$

permet de voir la formule démontrée par Gross et Kudla comme une résolution explicite de la conjecture de Jacquet dans le cas de trois formes nouvelles cuspidales sur \mathbb{Q} de poids 2 et de niveau $\Gamma_0(N)$. En effet, si K est un corps de nombres, π_1, π_2, π_3 trois représentations automorphes cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ telles que le produit de leurs caractères centraux est trival, alors la conjecture de Jacquet affirme que la valeur centrale

$$L\left(\frac{1}{2}, \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3, r\right) \quad (1.3)$$

de la fonction L du produit triple $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$ s'annule si et seulement si il existe une algèbre de quaternions B sur K telle que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{A}_K^\times B^\times(K) \backslash B^\times(\mathbb{A}_K)} \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) dx \quad (1.4)$$

s'annule pour tout $\varphi_i \in \pi_i^B$, où r est la représentation naturelle du L -groupe ${}^L G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^3 \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ de $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ et π_i^B est la représentation automorphe de $B^\times(\mathbb{A}_F)$ associée à π_i par la correspondance de Jacquet-Langlands [Kna97]. Ici, on considère les trois représentations automorphes π_f, π_g, π_h de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ issues de f, g, h et $\pi_f^B, \pi_g^B, \pi_h^B$ les représentations automorphes de $B^\times(\mathbb{A}_F)$ associées par la correspondance de Jacquet-Langlands. Pour $\psi \in \{f, g, h\}$, en suivant les notations de la partie 4.2 et de la décomposition 5.22, on considère

$$\Phi_\psi : \begin{cases} B^\times(\mathbb{Q}) \backslash B^\times(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) / B^\times(\mathbb{R}) \hat{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ b_i & \longmapsto & \Phi_\psi(b_i) = \left(\sum_{1 \leq i \leq h} \frac{1}{4w_i} \right)^{\frac{1}{2}} w_i \lambda_i(\psi) \end{cases},$$

où $\hat{R} = \hat{R} = R \otimes \hat{\mathbb{Z}}$, avec R un ordre d'Eichler de niveau N de B .

Ainsi, l'application φ_ψ induite par Φ_ψ sur $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times B^\times(\mathbb{Q}) \backslash B^\times(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ est un élément de π_ψ^B , de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times B^\times(\mathbb{Q}) \backslash B^\times(\mathbb{A})} \varphi_f(x) \varphi_g(x) \varphi_h(x) dx &= \left(\sum_{1 \leq i \leq h} \frac{1}{4w_i} \right)^{-1} \sum_{1 \leq j \leq h} \frac{1}{w_j} \varphi_f(b_j) \varphi_g(b_j) \varphi_h(b_j) \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq h} \frac{1}{4w_i} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{1 \leq j \leq h} w_j^2 \lambda_j(f) \lambda_j(g) \lambda_j(h). \end{aligned}$$

Les fonctions L considérées dans [GK92] et dans [Ich08] sont définies suivant une convention légèrement différente (essentiellement un facteur d'une période et une translation de $\frac{3}{2}$).

La conjecture de Jacquet a d'abord été résolue par Harris et Kudla [HK91], en utilisant notamment une généralisation de la formule de Siegel-Weil démontrée par Kudla et Rallis [KR88], sans toutefois donner de relation explicite entre la valeur centrale de la fonction L triple (1.3) et l'intégrale (1.4). Une relation explicite est donnée par Gross et Kudla [GK92] dans le cas de trois formes modulaires cuspidales nouvelles propres de même poids 2 et de même niveau $\Gamma_0(N)$ (N sans facteur carré), et généralisée au cas de trois formes de poids k_1, k_2, k_3 ($\max k_i < \min_{i \neq j} k_i + k_j$) et de niveaux $\Gamma_0(N_1), \Gamma_0(N_2), \Gamma_0(N_3)$ (N_i sans facteur carré) par Böcherer et Schulze-Pillot [BS95]. Ichino [Ich08] détermine une relation entre (1.3) et (1.4) dans le cas général de trois représentations automorphes cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ sur un corps de nombres F .

2 Facteurs locaux et équation fonctionnelle

2.1 Équation fonctionnelle de la fonction L triple

Soit $N > 0$ un entier sans facteur carré et $f, g, h \in S_2(\Gamma_0(N))$ trois formes primitives. On définit la forme modulaire $F = f \otimes g \otimes h$ sur \mathfrak{h}^3 de poids $(2, 2, 2)$ pour $\Gamma_0(N)^3$ sur \mathfrak{h}^3 par

$$F(z_1, z_2, z_3) = f(z_1)g(z_2)h(z_3).$$

Pour définir la fonction L de F , on écrit les développements de Fourier de f, g, h :

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n, \quad g(z) = \sum_{n \geq 1} b_n q^n, \quad h(z) = \sum_{n \geq 1} c_n q^n.$$

Pour l premier ne divisant pas N , notons $\alpha_{l,1}, \alpha_{l,2}$ les paramètres de Satake de f , c'est-à-dire les racines du polynôme $1 - a_l X + lX^2$. On note de même $\beta_{l,1}, \beta_{l,2}$ et $\gamma_{l,1}, \gamma_{l,2}$ les paramètres de Satake de g et h . Pour p premier divisant N , on pose $\varepsilon_p = -a_p b_p c_p = \pm 1$. Remarquons qu'en notant w_p l'involution d'Atkin-Lehner sur $S_2(\Gamma_0(N))$ définie par $f | w_p = f |_2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & -p \end{pmatrix}$, et $u_p = w_p^{\otimes 3}$, on a

$$F | u_p = \varepsilon_p F.$$

Notation 2.1. Avec les notations précédentes, on note $L(F, s) = \prod_{l|N} L_l(F, s) \prod_{p|N} L_p(F, s)$ la fonction L aux places finies associée à F , avec

- i. $\forall l \nmid N, L_l(F, s) = \prod_{\varphi: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2\}} (1 - \alpha_{l,\varphi(1)} \beta_{l,\varphi(2)} \gamma_{l,\varphi(3)} l^{-s})^{-1}$, de sorte que l'on décrit les 8 produits possibles des paramètres de Satake de f, g, h .
- ii. $\forall p|N, L_p(F, s) = (1 + \varepsilon_p p^{-s})^{-1} (1 - \varepsilon_p p^{1-s})^{-2}$.

En outre, on note $\Lambda(F, s) = L_\infty(F, s) L(F, s)$ la fonction L de F , où

$$L_\infty(F, s) = (2\pi)^{3-4s} \Gamma(s) \Gamma(s-1)^3 = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s-1)^3.$$

La série $L(F, s)$ est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > \frac{5}{2}$.

Preuve. En effet, on sait que pour $i = 1, 2$, $|\alpha_{l,i}| = |\beta_{l,i}| = |\gamma_{l,i}| = l^{\frac{1}{2}}$. Or, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma := \operatorname{Re} s > \frac{5}{2}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = l^{\frac{3}{2}}$,

$$|1 - z l^{-s}| \geq 1 - l^{\frac{3}{2}-\sigma},$$

d'où, d'après la définition des facteurs locaux,

$$\prod_{l|N} |L_l(F, s)| \leq \prod_{l|N} (1 - l^{\frac{3}{2}-\sigma})^{-8} \leq \prod_{l \in \mathcal{P}} (1 - l^{\frac{3}{2}-\sigma})^{-8} = \zeta(\sigma - \frac{3}{2})^8 < \infty.$$

□

Pour établir le théorème 1.1, nous utiliserons une approche proche de celle de la méthode de Rankin-Selberg, en exploitant l'équation fonctionnelle d'une certaine série d'Eisenstein, que nous relierons à la fonction L de notre produit triple en utilisant une fonction zêta. Pour étudier la forme modulaire F , nous allons utiliser une approche symplectique.

Notation 2.2. On définit les groupes algébriques suivants sur \mathbb{Q} ,

- i. $G = \operatorname{GSp}_3$ le groupe des similitudes de l'espace symplectique de dimension 6 standard, *i.e.*

$$G = \{A \in \operatorname{GL}_6 \mid \exists \lambda \in \mathbb{G}_m, {}^t A J A = \lambda J\},$$

où $J = \begin{pmatrix} & & & & & 1_3 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1_3 & & & & & \end{pmatrix}$ et on note Z_G son centre,

- ii.

$$M = \left\{ m(a, \lambda) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & \lambda & & \\ & & {}^t a^{-1} & \\ & & & \end{pmatrix} \in G \mid a \in \operatorname{GL}_3, \lambda \in \mathbb{G}_m \right\},$$

- iii.

$$N = \left\{ n(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \in G \mid b \in \operatorname{Sym}_3 \right\},$$

- iv. $P = MN$.

v.

$$H = \{h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathrm{GL}_2^3 \mid \det h_1 = \det h_2 = \det h_3\}.$$

vi.

$$U = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)_{i=1,2,3} \in H \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{G}_a \right\} \quad \text{et} \quad U_0 = \{u \in U \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

On utilisera principalement ces groupes sur les corps de bases \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p et \mathbb{R} , ainsi que leurs versions adéliques (sur \mathbb{Q}). On dispose de la décomposition d'Iwasawa suivante, qui se révélera souvent utile,

$$G = PK = MNK, \tag{2.3}$$

où K est un sous-groupe compact maximal de G que nous préciserons selon le corps de base. On remarque que H s'injecte dans G , via

$$(h_1, h_2, h_3) = \left(\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \right)_{i=1,2,3} \in H \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & b_1 & \\ & a_2 & & b_2 \\ & & a_3 & b_3 \\ \hline c_1 & & d_1 & \\ & c_2 & & d_2 \\ & & c_3 & d_3 \end{array} \right) \in G,$$

nous identifierons donc H comme un sous-groupe de G . On utilisera enfin plusieurs fois l'élément

$$\delta = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathrm{Sp}_3.$$

2.2 Facteurs locaux de la fonction zêta

Soit v une place de \mathbb{Q} (non nécessairement archimédienne). Nous allons introduire la fonction zêta locale d'une certaine représentation induite locale de $G(\mathbb{Q}_v)$ par $P(\mathbb{Q}_v)$. Pour cela, on considère les caractères $\chi_{v,s}, \tilde{\chi}_{v,s} : P(\mathbb{Q}_v) = M(\mathbb{Q}_v)N(\mathbb{Q}_v) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ définis par

$$\chi_{v,s}(n(b)m(a, \lambda)) = |\det a|^{2s+2} |\lambda|^{-3s-3} \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}_{v,s}(n(b)m(a, \lambda)) = |\det a|^{-2} |\lambda|^3 \chi_{v,s}(n(b)m(a, \lambda)) \tag{2.4}$$

On note alors

$$I_v(s) = \mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\chi}_{v,s}) = \{\Phi \in \mathcal{S}(G(\mathbb{Q}_v)) \mid \Phi(n(b)m(a, \lambda)g) = \chi_{v,s}(m(a, \lambda))\Phi(g)\}.$$

Remarquons que d'après la décomposition d'Iwasawa (2.3), une fonction de $I_v(s)$ est uniquement déterminée par sa restriction à K .

2.2.1 Facteurs p -adiques

On notera simplement $G = G(\mathbb{Q}_p)$ dans cette partie et on fixe $K = \mathrm{GSp}_3(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe compact maximal de G .

On se donne ψ le caractère additif standard de \mathbb{Q}_p , de conducteur \mathbb{Z}_p et pour une représentation π admissible irréductible de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on note $\mathcal{W}(\pi)$ son modèle de Whittaker par rapport à ψ . Pour π_1, π_2, π_3 de telles représentations, et $W_i \in \mathcal{W}(\pi_i)$, $i = 1, 2, 3$, on définit W sur H par

$$\forall h = (h_1, h_2, h_3) \in H, \quad W(h) = W_1(h_1)W_2(h_2)W_3(h_3). \tag{2.5}$$

Notation 2.6. Avec les notations précédentes, pour $\Phi(s) \in I_p(s)$, on note

$$Z(s, W, \Phi(s)) = \int_{Z_G U_0 \backslash H} \Phi(\delta h, s) W(h) dh,$$

avec dh une mesure de Haar sur $Z_G U_0 \backslash H$ que nous préciserons ensuite.

Pour $p \nmid N$ (resp. $p|N$) premier, considérons π_1, π_2, π_3 les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ définies par les formes cuspidales f, g, h et soit $W_i^0 \in \mathcal{W}(\pi_i)$ l'unique vecteur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant (resp. $\Gamma_0(p)$ -invariant) tel que $W_i^0(1) = 1$. Notons W^0 la fonction définie par (2.5) correspondante.

Proposition 2.7. *En suivant les notations précédentes, on a*

$$Z(s, W^0, \Phi_p^\sharp(s)) = \frac{1}{b_p(s)} L_p(F, s+2),$$

où $b_p(s) = \zeta_p(2s+2)\zeta_p(4s+2) = (1-p^{-2s-2})^{-1}(1-p^{-4s-2})^{-1}$ et $\Phi_p^\sharp(s) \in I_p(s)$ est définie en (2.16).

Preuve. Voir la partie 3

□

2.2.2 Facteur archimédien

Dans cette partie, on note

$$K = \left\{ k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_3(\mathbb{R}) \mid a+ib \in U_3(\mathbb{C}) \right\},$$

où $U_3(\mathbb{C})$ désigne le groupe unitaire de degré 3 sur \mathbb{C} .

Notation 2.8. Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $\Phi^{2n} \in I_\infty(s)$ la section telle que pour tout $k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in K$,

$$\Phi^{2n}(k, s) = (\det(a+ib))^{2n}.$$

On note également W_0^{2n} le vecteur du modèle de Whittaker de la représentation en série discrète de poids $2n$ donné par

$$W_0^{2n} \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} e^{2i\pi x} y^n e^{-2\pi y} e^{2in\theta} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases},$$

et $W^{2n} = (W_0^{2n})^{\otimes 3}$ défini sur $H(\mathbb{R})$. Comme dans le cas non-archimédien, on considère

$$Z(s, W^{2n}, \Phi^{2n}(s)) = \int_{Z_G U_0 \backslash H} \Phi^{2n}(\delta h, s) W^{2n}(h) dh.$$

Proposition 2.9. *On calcule*

$$Z(s, W^{2n}, \Phi^{2n}(s)) = (-1)^n 2^{-4s-6n+1} \pi^{-s-3n+5} \frac{\Gamma(s+n)^3 \Gamma(s+3n-1)}{\Gamma(s+n+1) \Gamma(2s+2n)}.$$

Preuve. Voir [GK92, p.171, (6.12)].

□

Ici, on est dans le cas de formes de poids 2, donc dans le cas $n = 1$, où

$$L_\infty(F, s+2) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s+2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s+1)^3 = (2\pi)^{-4s-5} \Gamma(s+1)^3 \Gamma(s+2),$$

donc en posant $b_\infty(s) = \pi^{-3s-2} \Gamma(s+2) \Gamma(2s+1)$ et $\xi_\infty(s) = -\pi^5 \frac{\Gamma(s+1) \Gamma(2s+1)}{\Gamma(s+2) \Gamma(2s+2)} = -\frac{\pi^5}{(s+1)(2s+1)}$, on a

$$Z(s, W^2, \Phi^2(s)) = \xi_\infty(s) \frac{1}{b_\infty(s)} L_\infty(F, s+2). \quad (2.10)$$

2.3 Choix du vecteur test de la fonction zêta

Dans le cas non ramifié ($p \nmid N$), suivant [PR87], on va choisir l'unique vecteur de $I_p(s)$ laissé fixe par $K_p = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

Dans le cas ramifié ($p \mid N$), plutôt que de choisir un vecteur laissé fixe par K_p , on va plutôt considérer un vecteur invariant par le sous-groupe d'Iwahori de $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GSp}_3(\mathbb{Q}_p)$,

$$K_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Z}_p) \mid c \equiv 0 \pmod{pM_3(\mathbb{Z}_p)} \right\}.$$

Pour cela, remarquons que la réduction de $K_0(p)$ modulo p est exactement le sous-groupe parabolique maximal $P(\mathbb{F}_p)$ de $G(\mathbb{F}_p)$. On dispose de la décomposition de Bruhat de $G(\mathbb{F}_p)$ par rapport à $P(\mathbb{F}_p)$

$$G(\mathbb{F}_p) = \bigsqcup_{i=0}^3 P(\mathbb{F}_p)w_iP(\mathbb{F}_p),$$

où

$$\forall i = 0, \dots, 3, \quad w_i = \left(\begin{array}{cc|cc} 1_{3-i} & & & 0 \\ & 0 & & 1_i \\ \hline 0 & & 1_{3-i} & \\ & -1_i & & 0 \end{array} \right). \quad (2.11)$$

On en déduit la décomposition

$$K_p = \bigsqcup_{i=0}^3 K_0(p)w_iK_0(p),$$

et par définition de $K_0(p)$, chaque classe $K_0(p)w_iK_0(p)$, $i = 0, \dots, 3$, est exactement l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de K_p telles que le rang de la projection de c modulo p est i . On note donc $\Phi_{p,i}(s) \in I_p(s)$ la fonction dont la restriction à K_p est l'indicatrice de $K_0(p)w_iK_0(p)$. En particulier, la restriction de $\Phi_{p,0}(s)$ à K_p est la fonction caractéristique de $K_0(p)$. La famille des $\Phi_{p,i}(s)$ forme une base de l'espace $I_p(s)^{K_0(p)}$ des vecteurs $K_0(p)$ -invariants, mais nous allons en construire une plus adaptée aux symétries de la fonction zêta locale et parmi laquelle se trouvera le vecteur recherché. En fait, comme nous le verrons, on remarque facilement que pour $\Phi(s) \in I_p^{K_0(p)}$,

$$Z(s, W^0, \Phi(s)|u_p) = \varepsilon_p Z(s, W^0, \Phi(s)). \quad (2.12)$$

On va donc regarder l'action de u_p (vu comme l'élément $\eta_p = \begin{pmatrix} & & & 1_3 \\ -p1_3 & & & \end{pmatrix} \in G$) sur $I_p(s)^{K_0(p)}$, qui est bien définie puisque pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_0(p)$,

$$\eta_p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \eta_p^{-1} = \begin{pmatrix} & & & 1_3 \\ -p1_3 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & -p^{-1}1_3 & \\ 1_3 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -p^{-1}c \\ -pb & a \end{pmatrix} \in K_0(p),$$

car $p^{-1}c \in M_3(\mathbb{Z}_p)$ par hypothèse.

Lemme 2.13. *L'action de u_p sur $I_p(s)^{K_0(p)}$ est donnée par*

$$\forall i = 0, \dots, 3, \quad \Phi_{p,i}(s)|u_p = p^{(2i-3)(s+1)} \Phi_{p,3-i}(s).$$

Ainsi, en considérant la normalisation $\tilde{\Phi}_{p,i}(s) := p^{-i(s+1)} \Phi_{p,i}(s)$, on a $\tilde{\Phi}_{p,i}(s)|u_p = \tilde{\Phi}_{p,3-i}(s)$.

Preuve. Il nous suffit de calculer les évaluations de $\Phi_{p,i}(s)|u_p$ en w_j pour $0 \leq j \leq 3$. On vérifie que

$$w_j \eta_p = \begin{pmatrix} 1_3 & & & \\ & p1_3 & & \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1_{3-j} & & & \\ & p1_j & & \\ \hline & & 1_{3-j} & \\ & & & p^{-1}1_j \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & & 1_{3-j} \\ & -1_j & & 0 \\ \hline -1_{3-j} & & & \\ 0 & & & 1_j \end{array} \right) \\ \in m(1_3, p)m(a, 1)K_0(p)w_{3-j}K_0(p),$$

avec $a = \begin{pmatrix} 1_3 & \\ & p1_3 \end{pmatrix}$. D'où,

$$(\Phi_{p,i}(s)|_{u_p})(w_j) = \Phi_{p,i}(w_j \eta_p, s) = \chi_{p,s}(m(1_3, p)m(a, 1))\delta_{i,3-j} = p^{(2i-3)(s+1)}\Phi_{p,3-i}(w_j, s).$$

□

Notation 2.14. On définit les deux vecteurs

$$\Phi_{K_p}(s) = \sum_{i=0}^3 \Phi_{p,i}(s) = \sum_{i=0}^3 p^{i(s+1)}\tilde{\Phi}_{p,i}(s) \quad \text{et} \quad \Phi_{K'_p}(s) = \Phi_{K_p}(s)|_{u_p} = \sum_{i=0}^3 p^{(3-i)(s+1)}\Phi_{p,i}(s).$$

et les deux vecteurs

$$\Phi_{R_p}^{\pm}(s) = \sum_{i=0}^3 (\pm)^i \tilde{\Phi}_{p,i}(s).$$

Proposition 2.15. *On a les propriétés suivantes,*

- i. $\Phi_{K_p}(s)$ est K_p -invariant,
- ii. $\Phi_{K'_p}(s)$ est K'_p -invariant, avec $K'_p = \eta_p K_p \eta_p^{-1}$,
- iii. $\Phi_{R_p}^{\pm}(s)|_{u_p} = \pm \Phi_{R_p}^{\pm}(s)$,
- iv. Pour $s \neq -1$, $(\Phi_{K_p}(s), \Phi_{K'_p}(s), \Phi_{R_p}^+(s), \Phi_{R_p}^-(s))$ forme une base de $I_p(s)^{K_0(p)}$.

Preuve.

iv. On sait que $(\tilde{\Phi}_i)_{i=0,\dots,3}$ forme une base de $I_p(s)^{K_0(p)}$ et la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & p^{s+1} & p^{2(s+1)} & p^{3(s+1)} \\ p^{3(s+1)} & p^{2(s+1)} & p^{s+1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

□

Les choix de $\Phi_{K_p}(s)$ et $\Phi_{K'_p}(s)$ paraissent naturels, puisque que K_p et K'_p sont les sous-groupes compacts maximaux de $G(\mathbb{Q}_p)$ contenant $K_0(p)$. Nous verrons en que les deux vecteurs $\Phi_{R_p}^{\pm}(s)$ se réalisent comme des section plates associées à la fonction caractéristique du localisé d'un ordre d'Eichler de discriminant réduit N associé à l'algèbre de quaternions ramifiée en l'infini et aux $p|N$ tel que $\varepsilon_p = -1$.

Finalement, on pose

$$\Phi_p^{\sharp}(s) = \begin{cases} \Phi_{K_p}(s) & \text{si } p \nmid N \\ \xi_p(s)^{-1} \Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(s) & \text{si } p|N, \end{cases} \quad (2.16)$$

avec $\xi_p(s)$ définit en 3.1.

De manière similaire, on note

$$\Phi_{\infty}^{\sharp}(s) = \xi_{\infty}^{-1} \Phi_{\infty}^{-2}(s), \quad (2.17)$$

avec $\xi_{\infty}(s)$ définit en 2.10.

2.4 Série d'Eisentein, opérateur d'entrelacement et équation fonctionnelle

On repasse au niveau global. On note

$$K = \prod_v K_v.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$, notons $I(s) = \bigotimes_v I_v(s)$, où v décrit l'ensemble des places de \mathbb{Q} , l'ensemble des fonctions Φ lisses sur $G(\mathbb{A})$, K -finies à droites telles que

$$\forall a \in \text{GL}_3(\mathbb{A}), \lambda \in \mathbb{A}^{\times}, b \in \text{Sym}_3(\mathbb{A}), \forall g \in G(\mathbb{A}), \quad \Phi(n(b)m(a, \lambda)g) = |\det a|^{2s+2} |\lambda|^{-3s-3} \Phi(g).$$

Notation 2.18. Soit $\Phi(s) \in I(s)$ une section entière, on lui associe la série d'Eisenstein

$$\forall g \in G(\mathbb{A}), \quad E(g, s, \Phi) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \Phi(\gamma g, s).$$

De plus, cette série se prolonge méromorphiquement en s au plan complexe.

La série d'Eisenstein admet naturellement une équation fonctionnelle que nous précisons plus bas, et elle permet d'obtenir une représentation intégrale des fonctions zêta locales. En effet, considérons \tilde{F} la fonction sur $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))^2$ associée à $F = f \otimes g \otimes h$ de la manière suivante. On note

$$\widehat{\Gamma}_0(N) = \prod_{p|N} K_0(p) \times \prod_{p \nmid N} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),$$

de sorte que par approximation forte,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cdot (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^+) \times \widehat{\Gamma}_0(N)).$$

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})^3$, que l'on écrit selon cette décomposition $g = \gamma \cdot (g_\infty k)$, on pose

$$\tilde{F}(g) = j(g_\infty, i)^{-2} F(g_\infty(i)), \quad (2.19)$$

avec $j(g_\infty, z)$ le facteur automorphe de g_∞ , si $g_\infty = (g_1, g_2, g_3)$,

$$j(g_\infty, z) = j(g_1, z)j(g_2, z)j(g_3, z), \quad \text{avec} \quad j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = (cz + d) \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|^{-\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.20. Pour toute section factorisable $\Phi(s) = \otimes_v \Phi_v(s) \in I(s)$, où v décrit l'ensemble des places de \mathbb{Q} ,

$$Z(s, F, \Phi(s)) := \prod_v Z_v(s, W_v^0, \Phi_v) = \int_{Z_G(\mathbb{A})H(\mathbb{Q}) \backslash H(\mathbb{A})} \tilde{F}(h) E(h, s, \Phi(s)) dh.$$

Preuve. Voir [PR87, §2]. □

Maintenant, pour obtenir une équation fonctionnelle, il nous faut un opérateur d'entrelacement entre $I(s)$ et $I(-s)$, correspondant à la symétrie $s \leftrightarrow -s$ dans la fonction zêta. Pour cela, on reprend les opérateurs introduits dans [PR87, p. 86], dont on donne ensuite deux propriétés utiles.

Définition 2.21. Pour p premier, on définit l'opérateur d'entrelacement $M_p(s) : I_p(s) \rightarrow I_p(-s)$ pour $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle suffisamment grande par

$$\forall \Phi \in I_p(s), \quad \forall g \in G, \quad M_p(s)\Phi(g) := \int_{N(\mathbb{Q}_p)} \Phi(w_3 n g, s) dn,$$

où w_3 est la matrice définie en (2.11). On définit de même des opérateurs d'entrelacement $M_\infty : I_\infty(s) \rightarrow I_\infty(-s)$. On pose alors $M(s) = \otimes_v M_v(s)$, où v décrit l'ensemble des places de \mathbb{Q} , qui est également définie pour s de partie réelle assez grande par

$$M(s)\Phi(g) = \int_{N(\mathbb{A})} \Phi(w_3 n g, s) dn.$$

Proposition 2.22. On a les propriétés suivantes sur les opérateurs d'entrelacements locaux

- i. L'intégrale $M_p(s)\Phi(g)$ se prolonge méromorphiquement au plan complexe selon la variable s et l'opérateur $\frac{1}{a_p(s)} M_p(s)$ est entier en la variable de s et ne s'annule pas, avec $a_p(s) = \zeta_p(2s - 1)\zeta_p(4s - 1)$.

ii. $M_p(s)$ envoie $I_p(s)^{K_0(p)}$ sur $I_p(-s)^{K_0(p)}$ et

$$M_p(s)\Phi_{K_p}(s) = \frac{a_p(s)}{b_p(s)}\Phi_{K_p}(-s),$$

$$\text{où } b_p(s) = \zeta_p(2s+2)\zeta_p(4s+2).$$

Le premier point a déjà été énoncé plus haut et est présenté dans [PR87, p. 88 & 91]. La preuve de cette proposition dans le second cas fait l'objet de [GK92, partie 5]. On calcule d'abord brutalement l'image de $\tilde{\Phi}_0(s)$ par $M_p(s)$, puis on utilise les symétries par rapport à u_p pour en déduire le résultat.

La théorie générale des série d'Eisenstein indique que l'on a l'équation fonctionnelle suivante [KR88].

Théorème 2.23.

$$E(g, s, \Phi) = E(g, -s, M(s)\Phi).$$

De plus, on peut calculer l'action des opérateurs d'entrelacements locaux sur les facteurs locaux de la fonction zêta évaluée en les fonctions test non-archimédiennes $\Phi_p^\sharp(s) \in I_p(s)$ définie en (2.16).

Proposition 2.24.

$$Z_p(-s, W_p^0, M_p(s)\Phi_p^\sharp) = \delta_p(s) \frac{a_p(s)}{b_p(s)} Z_p(-s, W_p^0, \Phi_p^\sharp(-s)),$$

où

$$\delta_p(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \nmid N, \\ \varepsilon_p p^{-5s} & \text{si } p \mid N. \end{cases}$$

Preuve. Voir [GK92, §5].

□

De manière analogue, dans le cas archimédien, contre la fonction test $\Phi_\infty^\sharp(s) \in I_\infty(s)$ définie en (2.17), on a l'équation suivante.

Proposition 2.25.

$$Z_\infty(-s, W^2, M_\infty(s)\Phi_\infty^\sharp) = -\frac{a_\infty(s)}{b_\infty(s)} Z_\infty(-s, W^2, \Phi_\infty^\sharp(-s)),$$

où $b_\infty(s)$ a été défini en (2.10), $a_\infty(s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(2s-1)\Gamma_{\mathbb{C}}(4s-1)$.

Preuve. Voir [GK92, p.172, (6.19)].

□

2.5 Preuve de l'équation fonctionnelle

On a maintenant tout le matériel nécessaire pour démontrer l'équation fonctionnelle de la fonction Λ , énoncée au théorème 1.1

En effet, d'une part, d'après l'équation fonctionnelle de la série d'Eisenstein énoncée en 2.23 et la représentation intégrale 2.20 de la fonction zêta globale,

$$\begin{aligned} Z(s, F, \Phi^\sharp(s)) &= \int_{Z_G(\mathbb{A})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})} \tilde{F}(h)E(h, s, \Phi^\sharp(s))dh \\ &= \int_{Z_G(\mathbb{A})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})} \tilde{F}(h)E(h, -s, M(s)\Phi^\sharp(s))dh \\ &= Z(-s, F, M(s)\Phi^\sharp(s)). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Or, d'après 2.7 et 2.10,

$$Z(s, F, \Phi^\sharp(s)) = \frac{1}{\pi^{-3s-2}\Gamma(s+1)\Gamma(2s+1)\prod_p b_p(s)} \Lambda(F, s+2) = \frac{1}{b(s)} \Lambda(F, s+2), \quad (2.27)$$

où $b(s) = \zeta^\times(2s+2)\zeta^\times(4s+2)$, avec $\zeta^\times(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$. D'après l'équation fonctionnelle bien connue $\zeta^\times(1-s) = \zeta^\times(s)$, et d'après 2.24 et 2.25, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda(F, s+2) &= b(s)Z(s, F, \Phi^\sharp(s)) && \text{d'après (2.27)} \\ &= b(s)Z(-s, F, M(s)\Phi^\sharp(s)) && \text{d'après (2.26)} \\ &= \left(\prod_v \delta_v(s) a_v(s) \right) Z(-s, F, \Phi^\sharp(-s)) && \text{d'après (2.24) et 2.25} \\ &= \left(\prod_v \delta_v(s) \right) \underbrace{\zeta^\times(2s-1)\zeta^\times(4s-1)}_{= b(-s)} Z(-s, F, \Phi^\sharp(-s)) \\ &= \left(\prod_v \delta_v(s) \right) \Lambda(F, -s+2). \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant la définition des $\delta_v(s)$, on conclut

$$\Lambda(F, s) = - \left(\prod_{p|N} \varepsilon_p \right) N^{-5s+10} \Lambda(F, 4-s).$$

3 Calcul des facteurs locaux ramifiés de la fonction zêta

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux calculs des facteurs locaux de la fonction zêta pour $p|N$, pour les facteurs locaux pour $p \nmid N$, on renvoie à [PR87, p. 50-62, 74-78]. On va donc démontrer le résultat suivant pour $p|N$ premier fixé,

Théorème 3.1. *On a*

$$Z(s, W^0, \Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(s)) = \frac{\xi_p(s)}{b_p(s)} L_p(F, s+2),$$

où $b_p(s) = \zeta_p(2s+2)\zeta_p(4s+2) = (1-p^{-2s-2})^{-1}(1-p^{-4s-2})^{-1}$ et $\xi_p(s) = 2\varepsilon_p(p+1)^{-3}p^{-s-1}(1-\varepsilon_p p^{-s-1})^2 b_p(s)$.

Pour cela, commençons par étudier les fonctions de Whittaker associées à f, g, h au début de la section 2.2.1. Puisque le niveau N est sans facteurs carrés, alors par exemple d'après [LW12, p. 1183], on sait que les représentations locales déterminées par f, g et h pour p sont des torsions de la représentation spéciale Sp , respectivement par les caractères quadratiques non ramifiés $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ tels que

$$\omega_1(p) = a_p, \quad \omega_2(p) = b_p, \quad \omega_3(p) = c_p.$$

On note $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$, de sorte que $\varepsilon_p = -a_p b_p c_p = -\omega(p)$.

On dresse alors des propriétés sur les fonction de Whittaker $\Gamma_0(p)$ -invariantes correspondantes. Avant cela, notons la décomposition suivante de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sous l'action de $\Gamma_0(p)$.

Lemme 3.2. *On a la décomposition*

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) = \Gamma_0(p) \sqcup \bigsqcup_{x=0}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \Gamma_0(p).$$

Preuve. Dans le corps résiduel $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, on a

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) = B(\mathbb{F}_p) \sqcup B(\mathbb{F}_p) \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} B(\mathbb{F}_p),$$

car si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin B(\mathbb{F}_p)$, alors $c \in \mathbb{F}_p^\times$ et donc on peut écrire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & -d \\ & -Dc^{-1} \end{pmatrix} \in B(\mathbb{F}_p) \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} B(\mathbb{F}_p),$$

avec $D = ad - bc$, et il est clair que l'union est disjointe.

En tirant en arrière cette décomposition par la projection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, on obtient

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) = \Gamma_0(p) \sqcup \Gamma_0(p) \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \Gamma_0(p).$$

On remarque que si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin \Gamma_0(p)$, on a $d \in \mathbb{Z}_p^\times$ puisque sa projection $\pmod p$ est inversible et donc $d \not\equiv 0 \pmod p$. En considérant $x = bd^{-1} \pmod p$, on a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - xc & b - xd \\ c & d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a - xc & b - xd \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ b - xd & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p),$$

donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \Gamma_0(p) &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a - xc & b - xd \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \Gamma_0(p) \\ &\subset \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \Gamma_0(p), \end{aligned}$$

et on vérifie bien que les réunions sont disjointes. □

Ainsi, par les propriétés des fonctions de Whittaker $\Gamma_0(p)$ -invariantes, et d'après la décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il suffit de les calculer en les $\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$.

Proposition 3.3. *Soit η un caractère quadratique non ramifié et $\sigma = \mathrm{Sp} \otimes \eta$, de caractère central trivial et $W \in \mathcal{W}(\sigma)$ l'unique vecteur $\Gamma_0(p)$ -invariant (cf [Cas73]) tel que $W(1) = 1$. Alors*

- i. $W \left(\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(a) \eta(a) |a|,$
- ii. $W \left(\begin{pmatrix} a & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right) = -\mathbb{1}_{p^{-1}\mathbb{Z}_p}(a) p^{-1} \eta(a) |a|.$

On en déduit notamment que pour la fonction de Whittaker W^0 introduite à l'équation (2.5),

$$W^0|u_p = -\omega(p)W^0 = -a_p b_p c_p W^0.$$

Preuve. Par unicité, il suffit de construire une fonction W de Whittaker $\Gamma_0(p)$ -invariante telle que $W(1) = 1$ et de vérifier les formules ci-dessus, c'est par exemple fait dans [Wat08, p. 18].

Pour le dernier point, il nous suffit de montrer que $W_i^0|w_p = -\omega_i(p)W_i^0$, $i = 1, 2, 3$. Or, $W_i^0|w_p$ est une fonction de Whittaker $\Gamma_0(p)$ -invariante et

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -p & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \\ & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix},$$

donc

$$W_i^0|w_p(1) = W_i^0 \left(\begin{pmatrix} & 1 \\ -p & \end{pmatrix} \right) = -p^{-1} \omega_i(p) |p^{-1}| = -\omega_i(p),$$

par conséquent, $W_i^0|w_p$ et $-\omega_i(p)W_i^0$ coïncident en 1, on a bien l'égalité voulue.

□

On est maintenant en mesure de montrer la symétrie de la fonction zêta énoncée en 2.12.

Lemme 3.4. *Si $\Phi(s) \in I_p(s)^{K_0(p)}$, alors*

$$Z(s, W^0, \Phi(s)|_{u_p}) = Z(s, W^0|_{u_p}, \Phi(s)) = \varepsilon_p Z(s, W^0, \Phi(s)).$$

En particulier, si $\Phi(s)|_{u_p} = -\varepsilon_p \Phi(s)$, alors $Z(s, W^0, \Phi(s))$ s'annule identiquement.

Preuve. cf...

Puisque $\eta_p \in H$ et que $\eta_p^{-1} \equiv \eta_p \pmod{Z_G}$, on a d'après le dernier point de la proposition 3.3,

$$\begin{aligned} Z(s, W^0, \Phi_p(s)|_{u_p}) &= \int_{Z_G(\mathbb{Q}_p)U_0 \backslash H(\mathbb{Q}_p)} \Phi(\delta h \eta_p, s) W^0(h) dh \\ &= \int_{Z_G(\mathbb{Q}_p)U_0 \backslash H(\mathbb{Q}_p)} \Phi(\delta h, s) W^0(h \eta_p) dh = \varepsilon_p Z(s, W^0, \Phi_p(s)). \end{aligned}$$

□

Justifions maintenant le choix du vecteur $\Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(s)$ parmi les vecteurs de $I_p(s)^{K_0(p)}$. D'après le lemme précédent, on a déjà $Z(s, W^0, \Phi_{R_p}^{-\varepsilon_p}(s)) = 0$ pour tout s . Pour calculer zêta contre une fonction de $I_p(s)^{K_0(p)}$, il nous reste à calculer la fonction zêta contre $\Phi_{K_p}(s)$ (sa valeur contre $\Phi_{K'_p}(s)$ sera alors donnée, car $\Phi_{K'_p}(s) = \Phi_{K_p}(s)|_{u_p}$) et contre $\Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(s)$. On a tout d'abord

Lemme 3.5. $Z(s, W^0, \Phi_{K_p}(s)) = 0$ et donc $Z(s, W^0, \Phi_{K_p}(s)) = 0$.

Preuve. Puisque $\Phi_{K_p}(s)$ est K_p -invariante (à droite), en notant $K_H = \mathrm{GL}(\mathbb{Z}_p)^3 \cap H$, on a pour tout $k \in K_H$,

$$Z(s, W^0, \Phi_{K_p}(s)) = \int_{Z_G(\mathbb{Q}_p)U_0 \backslash H(\mathbb{Q}_p)} \Phi_{K_p}(\delta h k^{-1}, s) W^0(h) dh,$$

donc en intégrant sur K_H (pour une mesure dk telle que $\mathrm{vol}(K_H, dk) = 1$), puis en translatant,

$$Z(s, W^0, \Phi_{K_p}(s)) = \int_{Z_G(\mathbb{Q}_p)U_0 \backslash H(\mathbb{Q}_p)} \int_{K_H} \Phi_{K_p}(\delta h k^{-1}, s) W^0(h) dk dh = \int_{Z_G(\mathbb{Q}_p)U_0 \backslash H(\mathbb{Q}_p)} \int_{K_p} \Phi_{K_p}(\delta h, s) W_{K_H}^0(h) dh,$$

où

$$W_{K_H}^0(h) = \int_{K_H} W^0(hk) dk$$

est donc K_H -invariante à droite. Or, on peut montrer que $W_{K_H}^0$ est identiquement nul. En effet, en appliquant la décomposition d'Iwasawa de GL_2 à H , on a

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & x_i \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i^{-1} & \\ & a_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a a_i^2 & \\ & 1 \end{pmatrix} k_i \right)_{i=1,2,3} \mid x_i \in \mathbb{Z}_p, a_i \in \mathbb{Q}_p^\times, a \in \mathbb{Q}_p^\times, k_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \right\}$$

donc par propriété des fonctions de Whittaker et par K_H -invariance, il suffit de vérifier que $W_{K_H}^0$ s'annule sur les

$$h = \left(\begin{pmatrix} a a_i^2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right)_{i=1,2,3}.$$

Alors il suffit d'additionner les valeurs des $W^0(hk)$, où k décrit un ensemble de représentants des classes de $K_H/(\Gamma_0(p)^3 \cap H)$ décrites par 3.2. Par un calcul facile mais laborieux à écrire, on voit que ces termes se compensent et on conclut bien que $W^0(h)$ est nul.

□

Il nous reste donc à calculer zêta contre $\Phi_{R_p}^{\varepsilon p}(s)$. Dans la suite, nous omettrons les indice p , puisqu'il est clair que nous sommes au niveau local. Remarquons que

$$\begin{aligned} Z(s, W^0, \Phi_{R_p}^{\varepsilon p}(s)) &= \sum_{i=0}^3 Z(s, W^0, \varepsilon^i \tilde{\Phi}_i(s)) \\ &= Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)) + \varepsilon Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_1(s)) \\ &\quad + Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_{3-1}(s)) + \varepsilon Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_{3-0}(s)) \\ &= 2 \left(Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)) + \varepsilon Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_1(s)) \right). \end{aligned} \quad \text{d'après (2.13) et (2.12)}$$

Or, on sait que $Z(s, W^0, \Phi_K(s)) = 0$ et donc de la même manière que précédemment,

$$\begin{aligned} Z(s, W^0, \Phi_{K_p}(s)) &= \sum_{i=0}^3 p^{i(s+1)} Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_i(s)) \\ &= Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)) + p^{s+1} Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_1(s)) \\ &\quad + \varepsilon p^{2(s+1)} Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_1(s)) + \varepsilon p^{3(s+1)} Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)) \\ &= (1 + \varepsilon p^{3(s+1)}) Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)) + p^{s+1} (1 + \varepsilon p^{s+1}) Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_1(s)). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_1(s)) = -\frac{1 + \varepsilon p^{3(s+1)}}{p^{s+1}(1 + \varepsilon p^{s+1})} Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)),$$

et ainsi il nous suffit de calculer $Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_s(0))$, puisque

$$Z(s, W^0, \Phi_{R_p}^{\varepsilon p}(s)) = -2\varepsilon p^{s+1} (1 - \varepsilon p^{-s-1})^2 Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)).$$

Proposition 3.6. $Z(s, W^0, \tilde{\Phi}_0(s)) = -(p+1)^{-3} p^{-2s-2} (1 + \varepsilon_p p^{-s-2})^{-1} (1 + \varepsilon_p p^{-s-1})^{-2}$.

Pour cela, on va découper notre intégrale en deux, en utilisant la décomposition

$$H = H_0 \cup \begin{pmatrix} p1_3 & \\ & 1_3 \end{pmatrix} H_0, \quad \text{où } H_0 = \{h \in H \mid \text{ord}_p(\det h_i) \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Puisque les déterminants des éléments de H_0 sont d'ordre pair ce sont des carrés de \mathbb{Q}_p , donc d'après la décomposition d'Iwasawa de GL_2 , on a la décomposition

$$H_0 = Z_G U T K_H,$$

avec

$$T = \left\{ t(a) = t(a_1, a_2, a_3) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & \\ & a_1^{-1} \end{pmatrix} \right) \mid a_i \in \mathbb{Q}_p^\times \right\}.$$

Sur $Z_G \times U \times T \times K_H$, on va donc considérer la mesure

$$|a|^{-2} d^\times z du d^\times a dk,$$

où $|a| = |a_1 a_2 a_3|$ et $d^\times a = d^\times a_1 d^\times a_2 d^\times a_3$ et $d^\times a_i$ est la mesure de Haar de \mathbb{Q}_p^\times telle que $\text{vol}(\mathbb{Z}_p^\times, d^\times a_i) = 1$, de même pour $d^\times z$. On note également $du = du_1 du_2 du_3$ et du_i est la mesure de Haar de \mathbb{Q}_p telle que $\text{vol}(\mathbb{Z}_p, du_i) = 1$. La mesure dk est définie comme précédemment. On note dh la mesure correspondante sur H_0 via la décomposition citée plus haut.

Maintenant, un ensemble de représentants pour $U_0 \setminus U$ est clairement l'ensemble des

$$u(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{3} \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{3} \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{3} \\ & 1 \end{pmatrix} \right), \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

donc tout élément $\bar{h} \in Z_G U_0 \setminus H_0$ peut s'écrire $\bar{h} = u(x)t(a)k$, et on considère sur $Z_G U_0 \setminus H_0$ la mesure $d\bar{h}$ donnée par $|a|^{-2} dx d^\times a dk$. De même, sur $Z_G U_0 \setminus \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} H_0 \simeq Z_G U_0 \setminus H_0$, on considère la mesure $p^2 d\bar{h}$. De sorte que

$$\begin{aligned} Z(s, W^0, \Phi_0(s)) &= \int_{Z_G U_0 \setminus H_0} \Phi_0(\delta h, s) W^0(h) d\bar{h} \\ &\quad + p^2 \int_{Z_G U_0 \setminus H_0} \Phi_0\left(\delta \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} h, s\right) W^0\left(\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} h\right) d\bar{h}. \end{aligned}$$

On notera respectivement $Z_1(s)$ et $Z_2(s)$ ces deux termes. On va calculer $Z_1(s)$, dont la valeur sera donnée par l'addition des deux contributions (3.12) et (3.13), puis nous évoquerons rapidement le calcul très similaire de $Z_2(s)$.

Avec notre choix de mesure, on a

$$Z_1(s) = \int_{\mathbb{Q}_p \times (\mathbb{Q}_p^\times)^3 \times K_H} \Phi_0(\delta u(x)t(a)k, s) W^0(u(x)t(a)k) |a|^{-2} dx d^\times a dk.$$

Rappelons tout d'abord que $\Phi_0(s)$ coïncide sur K avec l'indicatrice de $K_0(p)$. Ainsi, puisque W^0 est quant à elle $\Gamma_0(p)$ -invariante, il nous suffit d'évaluer ces deux fonctions pour k dans chacune des classes données par 3.2. Puisque le support de $\Phi_0(s)$ est dans $PK_0(p)$, supposons que l'on puisse écrire l'élément $g = \delta u(x)t(a)k$ sous la forme

$$g = \delta u(x)t(a)k = nm(\alpha, \lambda)k_0,$$

avec $n \in N$, $\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$ et $k_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in K_0(p)$, avec donc $c \equiv 0 \pmod{p}$ et $d \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$.

On a, $|\det g| = 1$ (car $|\det \delta| = 1$), donc quitte à modifier k_0 , on peut supposer $\det(\delta^{-1}g) = 1$ et donc $\lambda = 1$. En outre, quitte à modifier α , on peut même supposer $d = 1$. En examinant les trois dernières lignes de g dans ses deux expressions, on obtient alors

$$(0, 1_3)g = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \left| & \frac{x}{3a_1} & \frac{x}{3a_2} & \frac{x}{3a_3} \right. \\ 0 & 0 & 0 & \left| & -a_1^{-1} & a_2^{-1} & 0 \right. \\ 0 & 0 & 0 & \left| & -a_1^{-1} & 0 & a_3^{-1} \right. \end{pmatrix}}_{=: A} \cdot k = {}^t\alpha^{-1}(c, 1_3).$$

On note alors $(C, D) := A \cdot k$, avec donc $C, D \in M_3(\mathbb{Q}_p)$.

Les lignes de $(c, 1_3)$ étant linéairement indépendantes sur \mathbb{Z}_p , la matrice ${}^t\alpha A$ doit elle aussi être de rang 3 sur \mathbb{Z}_p . Par conséquent, l'un de ses mineurs de taille 3 doit être inversible, et donc de déterminant dans \mathbb{Z}_p^\times , *i.e.* de valeur absolue égale à 1, et les autres de déterminant dans \mathbb{Z}_p . Or, les déterminants des mineurs de taille 3 de A valent en valeurs absolue

$$0 \quad \text{ou} \quad |a_1 a_2 a_3|^{-1} |x| \quad \text{ou} \quad |a_1 a_2 a_3|^{-1} |a_i a_j|, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

On en déduit donc que l'on doit avoir

$$|\det \alpha| \cdot |a_1 a_2 a_3|^{-1} \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|x|, |a_i a_j|) = 1.$$

Comme dit précédemment, on va évaluer $\Phi_0(s)$ et W^0 en les classes de k modulo $\Gamma_0(p)$. On se place tout d'abord dans le cas où $k = 1$. Alors

$${}^t\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3a_1} & \frac{x}{3a_2} & \frac{x}{3a_3} \\ -a_1^{-1} a_2^{-1} 0 & 0 & a_3^{-1} \\ -a_1^{-1} & 0 & a_3^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\alpha^{-1}c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

On a donc $|\det \alpha|^{-1} = |a_1 a_2 a_3|^{-1} |x| = |a_1 a_2 a_3|^{-1} \max_{1 \leq i, j \leq 3} (|x|, |a_i a_j|)$ et les coefficients de c sont prescrits, $c_{ij} = x^{-1} a_i a_j$. Or, par hypothèse, $c \in pM_3(\mathbb{Z}_p)$, donc $|x^{-1} a_i a_j| < 1$, *i.e.* $|x| > |a_i a_j|$.

Réciproquement, on vérifie bien qu'à condition que k soit dans la classe de 1, si pour tout $i = 1, 2, 3$, $|a_i|^2 < |x|$, alors $g = \delta u(x)t(a)k$ s'écrit bien $g = nm(\alpha, \lambda)k_0 \in PK_0(p)$, avec α et c décrits en 3.7. On en déduit donc en utilisant simplement les propriétés des fonctions de $I_p(s)$ et du calcul de W_0 donné à la proposition 3.3,

Lemme 3.8. Si $k \in \Gamma_0(p)^3 \cap H$, alors en notant $|a| = |a_1 a_2 a_3|$,

$$\Phi_0(\delta u(x)t(a)k, s) = \begin{cases} |a|^{2s+2}|x|^{-2s-2} & \text{si } |a_i|^2 < |x|, \quad i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$W^0(u(s)t(a)k) = \begin{cases} \psi(x)|a|^2 & \text{si } |a_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On se place maintenant dans le cas où $k = \left(\begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, 1, 1 \right)$, de sorte que cette fois,

$$(C, D) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{x}{3a_1} - a_1 x'_1 & a_2 & a_3 & a_1 & \frac{x}{3a_2} & \frac{x}{3a_3} \\ & a_1^{-1} & 0 & 0 & a_2^{-1} & 0 \\ & a_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & a_3^{-1} \end{array} \right) = {}^t\alpha(c, 1).$$

On a donc $D = {}^t\alpha^{-1}$, d'où $|\det \alpha|^{-1} = |a_1 a_2 a_3|^{-1} |a_1|^2$ et en regardant les mineurs comme précédemment, $|\det \alpha|^{-1} = |a_1 a_2 a_3|^{-1} \max_{1 \leq i, j \leq n} (|x + a_1 x'_1|, |a_i a_j|)$. D'autre part, on a $c = {}^t\alpha C$. On obtient cette fois-ci les conditions

$$|a_1|^2 > |x + a_1^2 x'_1|, \quad \text{et} \quad |a_1| > \max(|a_2|, |a_3|).$$

La réciproque se vérifie également. On obtient donc

Lemme 3.9. Si $k \in K_H$ a pour représentant $\left(\begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, 1, 1 \right)$, alors

$$\Phi_0(\delta u(x)t(a)k, s) = \begin{cases} |a|^{2s+2}|a_1|^{-4s-4} & \text{si } |a_1|^2 > |x + a_1^2 x'_1| \text{ et } |a_1| > \max(|a_2|, |a_3|), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$W^0(u(s)t(a)k) = \begin{cases} \psi(x + a_1^2 x'_1)|a|^2 & \text{si } |a_1|^2 \leq p \text{ et } \max(|a_2|, |a_3|) \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les deux autres classes de représentants $\left(1, \begin{pmatrix} 1 & x'_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, 1 \right)$ et $\left(1, 1, \begin{pmatrix} 1 & x'_3 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right)$ symétriques de celle que l'on vient de calculer, les calculs et les résultats sont similaires. Enfin, si plus d'une composante de k est hors de la classe $\Gamma_0(p)$, alors $\delta u(x)t(a)k \notin PK_0(p)$. En effet, si par exemple $k = \left(\begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x'_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, 1 \right)$, alors on a

$$(C, D) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & \frac{x}{3a_1} & \frac{x}{3a_2} & \frac{x}{3a_3} \\ 0 & 0 & 0 & -a_1^{-1} & a_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1^{-1} & 0 & a_3^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -x'_1 & & & 1 & & \\ & -x'_2 & & & 1 & \\ & & 1 & & & 0 \\ \hline -1 & & & 0 & & \\ & -1 & & & 0 & \\ & & 0 & & & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & & & a_1 & a_2 & \frac{x}{3a_3} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & a_3^{-1} \end{array} \right)$$

et donc D n'est pas inversible, ce qui contredit la condition $(C, D) = {}^t\alpha^{-1}(c, 1_3)$, et on trouve un analogue dans les autres cas. On peut donc maintenant calculer $Z_1(s)$, en découpant l'intégrale sur chacune des classes.

Tout d'abord, d'après le lemme 3.8 la contribution de la classe $\Gamma_0(p)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Gamma_0(p)^3 \cap H) & \int_{\substack{|a_i|^2 < x \\ |a_i| < 1, i=1,2,3}} |a|^{2s+2} |x|^{-2s-2} \psi(x) d^\times a dx \\ & = \text{vol}(\Gamma_0(p)^3 \cap H) \left(\int_{|a_i| \leq 1, i=1,2,3} |a|^{2s+2} d^\times a \int_{|x| > 1} \psi(x) |x|^{-2s-2} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{|a_i| \leq 1, i=1,2,3} \int_{|a_i|^2 < |x| \leq 1} |a|^{2s+2} \psi(x) |x|^{-2s-2} dx d^\times a \right), \end{aligned}$$

où l'on a découpé l'intégrale selon $|x| \leq 1$ ou $|x| > 1$. D'après les calculs de l'annexe, on a d'une part

$$\begin{aligned} \int_{|a_i| \leq 1, i=1,2,3} |a|^{2s+2} d^\times a \int_{|x| > 1} \psi(x) |x|^{-2s-2} dx & = \left(\int_{|a_1| \leq 1} |a_1|^{2s+2} d^\times a_1 \right)^3 \int_{|x| > 1} \psi(x) |x|^{-2s-2} dx \\ & = (1 - p^{-2s-2})^{-3} (-p^{-(2s+2)}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_{|a_i| \leq 1, i=1,2,3} \int_{|a_i|^2 < |x| \leq 1} |a|^{2s+2} \psi(x) |x|^{-2s-2} dx d^\times a & = \sum_{n \geq 0} p^{n(2s+2)} \int_{|x|=p^{-n}} dx \int_{\substack{|a_i|^2 < p^{-n} \\ i=1,2,3}} |a_i|^{2s+2} d^\times a \\ & = \sum_{n \geq 0} p^{n(2s+2)} \text{vol}(p^n \mathbb{Z}_p^\times, dx) \left(\int_{|a_1|^2 < p^{-n}} |a_1|^{2s+2} d^\times a_1 \right)^3. \end{aligned}$$

Or, pour $n \geq 0$ entier,

$$\begin{aligned} \int_{|a_1|^2 < p^{-(2n+1)}} |a_1|^{2s+2} d^\times a_1 & = \int_{|a_1|^2 < p^{-2n}} |a_1|^{2s+2} d^\times a_1 = \int_{|a_1| \leq p^{-(n+1)}} |a_1|^{2s+2} d^\times a_1 \\ & = p^{-(n+1)(2s+2)} (1 - p^{-(2s+2)})^{-1}, \end{aligned}$$

donc en découpant la somme entre entiers pairs et impairs,

$$\begin{aligned} \int_{|a_i| \leq 1, i=1,2,3} \int_{|a_i|^2 < |x| \leq 1} |a|^{2s+2} \psi(x) |x|^{-2s-2} dx d^\times a & = (1 - p^{-1})(1 - p^{-(2s+2)})^{-3} \left(\sum_{n \geq 0} p^{2n(2s+1)} p^{-2n} p^{-3(n+1)(2s+2)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n \geq 0} p^{(2n+1)(2s+1)} p^{-2n-1} p^{-3(n+1)(2s+2)} \right) \\ & = (1 - p^{-1})(1 - p^{-(2s+2)})^{-3} (1 + p^{2s+1}) \sum_{n \geq 0} p^{-3(2s+2)} p^{-n(2s+4)} \\ & = (1 - p^{-1})(1 - p^{-(2s+2)})^{-3} (p^{-2s-1} + 1) p^{-4s-5} (1 - p^{-2s-4})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il nous reste à multiplier les deux termes (3.10) et (3.11) que l'on vient de calculer par $\text{vol}(\Gamma_0(p)^3 \cap H)$, qui vaut $(p+1)^{-3}$, car $H/(\Gamma_0(p)^3 \cap H)$ possède $(p+1)^3$ classes et $\text{vol}(H) = 1$ par construction de notre mesure de Haar. On obtient finalement la contribution

$$(1+p)^{-3} (1 - p^{-2s-2})^{-3} \left((1 - p^{-1})(p^{-2s-1} + 1) p^{-4s-5} (1 - p^{-2s-4})^{-1} - p^{-(2s+2)} \right). \quad (3.12)$$

Il nous reste maintenant à calculer la contribution de la classe de représentant $\left(\begin{pmatrix} 1 & x'_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, 1, 1 \right)$, et ses deux autres analogues. Le calcul est plus rapide, puisque d'après le lemme 3.9, la contribution est donnée par (en remarquant que la condition $|a_1|^2 \leq p$ est équivalente à $|a_1| \leq 1$)

$$-p^{-1} (p+1)^{-3} \int_{\substack{|x+a_1 x'_1| < |a_1|^2 \\ \max(|a_2|, |a_3|) < |a_1| \leq 1}} |a|^{2s+2} |a_1|^{-4s-4} \psi(x + a_1^2 x'_1) dx d^\times a.$$

Or, ψ est trivial sur \mathbb{Z}_p , donc la contribution vaut

$$\begin{aligned}
& -p^{-1}(p+1)^{-3} \int_{\max(|a_2|, |a_3|) < |a_1| \leq 1} |a|^{2s+2} |a_1|^{-4s-4} \underbrace{\text{vol}(B(-a_1^2 x'_1, |a_1|^2), dx)}_{= \text{vol}(B(0, |a_1|^2), dx) = |a_1|^2 p^{-1}} d^\times a \\
& = -p^{-2}(p+1)^{-3} \int_{|a_1| \leq 1} |a_1|^{-2s} \int_{\max(|a_2|, |a_3|) \leq |a_1| p^{-1}} |a_2 a_3|^{2s+2} d^\times a_2 d^\times a_3 d^\times a_1 \\
& = -p^{-2}(p+1)^{-3} \int_{|a_1| \leq 1} |a_1|^{-2s} (|a_1| p^{-1})^{-4s-4} (1 - p^{-2s-2})^{-2} d^\times a_1 \\
& = -p^{-4s-6} (p+1)^{-3} (1 - p^{-2s-2})^{-2} (1 - p^{-2s-4})^{-1}
\end{aligned}$$

La contribution totale des $3p$ classes correspondantes (on fait varier x'_i modulo p) vaut donc

$$-3p^{-4s-5} (p+1)^{-3} (1 - p^{-2s-2})^{-2} (1 - p^{-2s-4})^{-1}. \quad (3.13)$$

Finalement,

$$Z_1(s) = p^{-2s-2} (p+1)^{-3} (1 - p^{-2s-2})^{-3} (1 - p^{-2s-4})^{-1} (1 + 2p^{-2s-3} - p^{-4s-4} - 2p^{-4s-5}). \quad (3.14)$$

Le calcul de Z_2 est très similaire, puisque l'on remarque que

$$\delta \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \delta^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ & p & & \\ \hline & & p & \\ & & & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ & -1 & \\ \hline & & -1 \\ & & & p {}^t A^{-1} \end{array} \right),$$

et donc

$$\Phi_0(\delta \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} h, s) = \Phi_0(\delta \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} \delta^{-1} \delta h, s) = \chi_{p,s}(m(A, p)) \Phi_0(\delta h, s) = p^{-s-1} \Phi(\delta h, s).$$

Les espaces sur lesquels on calcule $Z_2(s)$ sont donc similaires à ceux de $Z_1(s)$, et on calcule de même les fonctions de Whittaker associées à chaque classe d'équivalence. Pour plus de précision, on peut consulter [GK92, p. 163, équation (4.36)]. On obtient

$$Z_2(s) = (1+p)^{-3} \varepsilon_p p^{-3s-3} (1 - p^{-2s-2})^{-3} (1 - p^{-2s-4})^{-1} (2 + p^{-1} - 2p^{-2s-2} - p^{-4s-5}). \quad (3.15)$$

Finalement, en combinant les expressions (3.14) et (3.15), on conclut bien à l'expression de la proposition 3.6 et donc l'expression du théorème 3.1.

4 Théorie d'Eichler et module supersingulier

4.1 Algèbres de quaternions

Dans la suite, on introduit le vocabulaire d'Eichler concernant les algèbres de quaternions, en suivant principalement les expositions de [Vig80] et [Voi21]. Dans la suite, K désigne un corps commutatif quelconque, de caractéristique différente de 2.

Définition 4.1 (Algèbre de quaternions). Une *algèbre de quaternions* B de centre K est une algèbre centrale de dimension 4 sur K tel qu'il existe un couple $(a, b) \in K^2$ et des éléments $i, j \in B$ vérifiant les relations

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad \text{et} \quad ij = -ji$$

et tel que $(1, i, j, ij)$ est une base de B . L'algèbre de quaternions B est ainsi définie par le couple (a, b) à isomorphisme près.

En outre, B est munie d'une involution notée $\bar{\cdot}$ et donnée par

$$(x + iy + jz + ijt) \mapsto \overline{x + iy + jz + ijt} = x - iy - jz - ijt.$$

Exemple 4.2. L'algèbre $M_2(K)$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans K est une algèbre de quaternions sur K pour le couple $(a, b) = (1, 1)$. En effet, on identifie K aux matrices scalaires de $M_2(K)$, on note $i = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, de sorte que $ij = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ et il est alors clair que $(1, i, j, ij)$ engendre $M_2(K)$ et en est une base. De plus, l'involution de $M_2(K)$ comme algèbre de quaternions est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.3. Les deux algèbres de quaternions sur \mathbb{R} sont l'algèbre \mathbb{H} des quaternions d'Hamilton (correspondant à $(a, b) = (-1, -1)$) et l'algèbre $M_2(\mathbb{R})$.

Définition 4.4 (Traces, normes réduites). Soit B une algèbre de quaternions sur K . Pour tout $b \in B$, on introduit $t(b) = b + \bar{b}$ sa *trace réduite* et $n(b) = b\bar{b}$ sa *norme réduite*.

Remarque 4.5. Dans le cas de $M_2(K)$, on retrouve bien la trace et la norme usuelles, toujours en identifiant K aux matrices scalaires.

Proposition 4.6. Une algèbre de quaternions est soit une algèbre à division, soit isomorphe à une algèbre de matrices $M_2(K)$.

Preuve. Voir [Vig80, p.6, corollaire 2.4].

□

On donne sans démonstration les résultats suivants, qui classifient les algèbres de quaternions sur les corps locaux et globaux, voir [Vig80, p. 31, théorème 1.1] pour le cas local et [Vig80, p. 74, théorème 3.1] pour le cas global.

Théorème 4.7 (Classification des algèbres de quaternions sur les corps locaux). Si K est un corps local différent de \mathbb{C} , alors il existe exactement deux algèbres de quaternions sur K , dont l'une est $M_2(K)$. La seule algèbre de quaternions sur \mathbb{C} est $M_2(\mathbb{C})$.

Exemple 4.8. Les seules algèbres de quaternions sur \mathbb{R} sont \mathbb{H} les quaternions de Hamilton et $M_2(\mathbb{R})$.

Théorème 4.9 (Classification des algèbres de quaternions sur un corps global). Soit B une algèbre de quaternions sur un corps global K . Pour une place v de K , on dit que B est *déployée* en v si $B_v := B \otimes_K K_v \simeq M_2(K_v)$ et *ramifiée* en v sinon (et alors B_v est une algèbre à division). Le nombre de places ramifiées dans B est fini et pair et le produit \mathfrak{D} des places ramifiées de B est appelé le *discriminant* de B . De plus, pour tout ensemble fini S de places de K de cardinal pair, il existe une algèbre de quaternions B sur K , unique à isomorphisme près, exactement ramifiée en les places de S .

Exemple 4.10. Comme listé dans [Piz80, p. 368, proposition 5.1], l'unique algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} ramifiée en p et ∞ est donnée par le couple

- i. $(-1, -1)$ si $p = 2$,
- ii. $(-1, -p)$ si $p \equiv 3 \pmod{4}$,
- iii. $(-2, -p)$ si $p \equiv 5 \pmod{8}$,
- iv. $(-p, -q)$ si $p \equiv 1 \pmod{8}$,

où q est un nombre premier tel que $q \equiv 3 \pmod{4}$ et p n'est pas un résidu quadratique modulo q .

Dans la suite, \mathcal{O} est un anneau de Dedekind et K est supposé être le corps des fractions de \mathcal{O} . On fixe B une algèbre de quaternions sur K .

Définition 4.11 (Réseau, idéal, ordre d'une algèbre de quaternions). Un \mathcal{O} -réseau L de B est un \mathcal{O} -module finiment engendré contenu dans B . On dit que L est un *idéal* (ou un *\mathcal{O} -réseau complet*) de B si $L \otimes_{\mathcal{O}} K \simeq B$. Un *ordre* R de B est un idéal qui est un anneau. Un ordre est de plus dit *maximal* s'il est maximal au sens de l'inclusion.

Exemple 4.12. Soit I un idéal de B . On associe à I son ordre à gauche et son ordre à droite,

$$R_d(I) = \{b \in B \mid bI \subset I\} \quad \text{et} \quad R_g(I) = \{b \in B \mid Ib \subset I\}.$$

On dit alors que I est un idéal à gauche (resp. à droite) de R_g (resp. R_d).

Exemple 4.13. Soit $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ l'algèbre des quaternions de Hamilton restreinte à \mathbb{Q} . L'ordre

$$\mathbb{Z}\langle i, j \rangle = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}ij$$

est appelé ordre de Lipschitz et n'est pas maximal. En notant $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i + j + ij)$ et

$$R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}\omega = \mathbb{Z}\langle i, j \rangle + \mathbb{Z}\langle i, j \rangle\omega$$

est un ordre maximal, dit ordre de Hurwitz. Cet ordre est euclidien pour la norme réduite, ce qui permet notamment de démontrer le célèbre théorème des quatre carrés de Lagrange (pour plus de détails, consulter par exemple [Voi21, Chapitre 11]).

Définition 4.14 (Ordre d'Eichler). Un ordre $R \subset B$ est un *ordre d'Eichler* si c'est l'intersection de deux ordres maximaux de B .

Proposition 4.15. *On suppose que K est un corps local non archimédien d'anneau des entiers \mathcal{O} et que $B = M_2(K)$. Un ordre R de B est d'Eichler si et seulement s'il existe $e \geq 0$ entier et \mathfrak{p} un idéal premier de \mathcal{O} tel que R est conjugué à $\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p}^e \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$. L'idéal \mathfrak{p}^e est alors appelé le niveau de l'ordre d'Eichler R .*

Preuve. Voir [Voi21, Proposition 23.4.3].

□

Proposition 4.16. *On suppose que K est un corps global de corps de nombres \mathcal{O} . Notons \mathfrak{D} le discriminant de B . Soit R un ordre de B et \mathfrak{N} son discriminant réduit (voir [Vig80, p. 24]). Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ (en notant $B_{\mathfrak{p}} = B \otimes K_{\mathfrak{p}}$ et $R_{\mathfrak{p}} = R \otimes K_{\mathfrak{p}}$),*

- i. si $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{D}$, alors $R_{\mathfrak{p}}$ est l'unique ordre maximal de $B_{\mathfrak{p}}$,*
- ii. si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}$, alors $R_{\mathfrak{p}}$ est un ordre d'Eichler de niveau \mathfrak{p}^e de $B_{\mathfrak{p}}$, où $e = \text{ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{N}$. En particulier, si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$, alors $R_{\mathfrak{p}} = M_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$.*

Dans la suite, on suppose $K = \mathbb{Q}$. On définit les notions de classes d'une algèbre de quaternions B sur \mathbb{Q} .

Définition 4.17. Deux idéaux I, J sont *équivalents à droite* s'il existe $b \in B^{\times}$ tel que $I = Jb$. Soit R un ordre. On appelle *classes à gauche* les classes à droite des idéaux à gauche de R . On définit manière analogue les classes à droite de R .

Proposition 4.18. *Si I est un idéal à gauche de B , on note $I^{-1} = \{b \in B \mid IbI \subset I\}$. Alors si R est un ordre,*

- i. L'application $I \mapsto I^{-1}$ induit une bijection entre les classes à gauche et les classes à droite de R .*
- ii. Si J est un idéal fixé, alors l'application $I \mapsto JI$ induit une bijection entre les classes à gauche de $R_g(J)$ et les classes à droite de $R_d(J)$.*

Définition 4.19. Soit R un ordre de B . Le *nombre de classes* de R est le nombre de classes des idéaux à gauche (ou à droite) de R . Le nombre de classes de B est le nombre de classes de n'importe lequel de ses ordres maximaux.

4.2 Matrices de Brandt et correspondance de Jacquet-Langlands

On suit les expositions de [Gro87] et [Piz80]. Soit M_1, M_2 deux entiers et $N = M_1 M_2$ sans facteur carré. On suppose que M_1 possède un nombre impair de diviseurs premiers et on considère dans cette partie l'algèbre de quaternions B sur \mathbb{Q} ramifiée à l'ensemble des places $S = \{p \mid p \mid M_1\} \cup \{\infty\}$. Soit R un ordre d'Eichler de B de niveau N , ce qui implique donc (en notant $B_p = B \otimes \mathbb{Q}_p$ et $R_p = R \otimes \mathbb{Z}_p$) que pour $p \in S \setminus \{\infty\}$, R_p est l'unique ordre maximal de B_p et pour $p \notin S$, R_p est conjugué à l'ordre d'Eichler de niveau N

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid c \equiv 0 \pmod{N\mathbb{Z}_p} \right\}$$

dans $B_p \simeq M_2(\mathbb{Q}_p)$. Notons I_1, \dots, I_h les classes d'idéaux à gauches de R et R_i l'ordre à droite de I_i . Puisque la norme $N(x)$ sur B est une forme quadratique entière définie positive, elle représente un nombre fini de fois 1. On en déduit que l'ensembles des unités R_i^\times de R_i est fini et on peut donc noter $w_i = |R_i^\times|/2$.

Pour $1 \leq i, j \leq h$, le réseau $M_{ij} = I_j^{-1} I_i$ a R_j pour ordre à gauche et R_i pour ordre à droite. On considère la série thêta

$$\theta_{ij}(q) = \frac{1}{2w_j} \sum_{b \in M_{ij}} q^{N(b)N(I_j)/N(I_i)}.$$

C'est une forme modulaire de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ [Piz80, Théorème 2.14.], dont on note les coefficients de Fourier

$$\theta_{ij}(q) = \sum_{n \geq 0} B_{ij}(n) q^n,$$

de sorte que $B_{ij}(n)$ vaut $\frac{1}{2w_j}$ multiplié par le cardinal de $\{b \in M_{ij} \mid N(b) = nN(I_i)/N(I_j)\}$.

Définition 4.20. On appelle *matrice de Brandt de degré $n \geq 0$* la matrice $B(n) = (B_{ij}(n))_{1 \leq i, j \leq h}$. On a en particulier $B(0) = \frac{1}{2}(w_j^{-1})_{1 \leq i, j \leq h}$ et $B(1)$ est la matrice identité.

Preuve. Le résultat est clair pour $B(0)$, puisque $\{b \in M_{ij} \mid N(b) = 0 \cdot N(I_i)/N(I_j)\} = \{0\}$. Pour le calcul de $B(1)$, on utilise le corollaire 1.20. de [Piz80], qui énonce qu'un idéal à gauche I d'un ordre \mathcal{O} contient un élément $b \in I$ tel que $N(b) = N(I)$ si et seulement si I est dans la même classe que \mathcal{O} . Ici, M_{ij} est un idéal à gauche de R_j , donc l'ensemble $\{b \in M_{ij} \mid N(b) = N(I_i)/N(I_j)\}$ est non vide si et seulement si $I_j^{-1} I_i \sim R_j = I_j^{-1} I_j$ i.e. $i = j$. On en déduit donc bien que $\{b \in M_{ij} \mid N(b) = N(I_i)/N(I_j)\}$ est de cardinal $\delta_{ij} 2w_j$. □

Proposition 4.21. *Les matrices de Brandt vérifient les propriétés suivantes*

- i. Les sommes $\sum_{1 \leq j \leq h} B_{ij}(n)$ sont indépendantes de $1 \leq i \leq h$.
- ii. Si $m \wedge n = 1$, alors $B(mn) = B(m)B(n)$.
- iii. Si $p \nmid N$ est un nombre premier, alors $B(p^{r+2}) = B(p^{r+1})B(p) - pB(p^r)$.
- iv. Les matrices de Brandt $B(n)$, pour n premier avec N , engendrent une \mathbb{Z} -algèbre commutative, que l'on notera \mathbb{B} .
- v. Pour tout $1 \leq i, j \leq h$, $w_j B_{ij}(n) = w_i B_{ji}(n)$, et donc $w_j \theta_{ij} = w_i \theta_{ji}$.

Preuve. Pour les trois premiers points, voir [Voi21, p. 770, proposition 41.3.1.] et [Voi21, p. 771, proposition 41.3.6.] (attention, les matrices de Brandt sont les transposées de celles définies ici). Pour iv. il suffit de combiner i. et ii. qui montrent les $B(p)$, $p \nmid N$ engendrent \mathbb{B} et commutent. Pour le point v., on peut consulter [Piz80, p. 356, lemme 3.18.(a)]. □

Remarque 4.22. Une approche géométrique est également possible, que nous utiliserons un peu plus bas pour faire apparaître les séries θ_{ij} dans l'expression de la valeur centrale de la fonction $L(F, 2)$. En effet, si l'on considère

$$X = ((\hat{R}^\times \setminus \hat{B}^\times(\mathbb{Q})) \times B(\mathbb{Q})) / B^\times(\mathbb{Q}),$$

où $\hat{R} = R \otimes \hat{\mathbb{Z}}$, alors on peut se donner g_1, \dots, g_n des représentants des classes pour $\hat{R}^\times \setminus \hat{B}^\times / B^\times$ et poser $R_i = B \cap g_i^{-1} \hat{R} g_i$, qui est un ordre d'Eichler de discriminant réduit N . En notant $M_{ij} = B \cap g_j^{-1} \hat{R} g_i$, les notations des R_i et des M_{ij} coïncident avec les notations précédentes [Gro87], à un multiple près, ce qui ne modifie pas la définition des θ_{ij} . En particulier, $\Gamma_i = B^\times \cap B_{\mathbb{R}} g_i^{-1} \hat{R} g_i$ et si l'on choisit les g_i tels que $g_{i,\infty}$ et $N(g_i) = 1$, alors

$$\forall \tau \in \mathfrak{h}, \quad \theta_{ij}(\tau) = \frac{1}{2w_j} \sum_{b \in M_{ij}} e^{2i\pi\tau N(b)},$$

car d'après notre choix, $N(I_i)/N(I_j) = 1$.

Notation 4.23. D'après le point i. de la proposition 4.21, on peut définir indifféremment de $1 \leq j \leq h$

$$E := \sum_{1 \leq j \leq h} \theta_{i,j} =: \sum_{n \geq 0} c_n q^n,$$

qui est l'unique série d'Eisenstein de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$.

Remarque 4.24. Les deux premiers coefficients de E vérifient

$$c_0 = \sum_{1 \leq j \leq h} B_{ij}(0) = \sum_{1 \leq j \leq h} \frac{1}{2w_j} = \frac{1}{24} \prod_{p|N} (p + \varepsilon_p),$$

d'après la formule de masse d'Eichler, [Voi21, p. 423, théorème 25.3.19], et

$$c_1 = \sum_{1 \leq j \leq h} B_{ij}(1) = \sum_{1 \leq j \leq h} \delta_{ij} = 1.$$

Il s'agit maintenant d'exhiber un espace sur lequel agissent les matrices de Brandt. Pour cela, plusieurs choix sont possibles, mais nous choisissons un espace que l'on va noter $\text{Pic}(X)$ (c'est en effet le module libre engendré par les fibrés en droites de la courbe X introduite à la remarque 4.22).

Notation 4.25. Soit $\text{Pic}(X)$ l'ensemble des applications définies sur l'ensemble des classes d'idéaux à gauche de R et à valeurs dans \mathbb{Z} (on notera également $P_{\mathbb{Q}} = \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$), dont (e_1, \dots, e_h) est une base, en notant $e_i = \mathbf{1}_{I_i}$ et que l'on munit de la forme bilinéaire symétrique et non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifiant

$$\forall 1 \leq i, j \leq h, \quad \langle e_i, e_j \rangle = w_i \delta_{ij}.$$

Notons $a_E = \sum_i w_i^{-1} e_i$ et considérons la forme linéaire $\text{deg} : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\forall a = \sum_{1 \leq i \leq h} \lambda_i e_i \in \text{Pic}(X), \quad \text{deg } a = \sum_{1 \leq i \leq h} \lambda_i,$$

de sorte que pour $a \in \text{Pic}(X)$, $\text{deg } b = \langle a_E, b \rangle$.

Par convention, on fait agir les matrices de Brandt à droite sur cet espace, c'est-à-dire d'après les relations

$$B(n)e_i = \sum_{1 \leq j \leq h} B_{ij}(n)e_j.$$

Proposition 4.26. *Les matrices de Brandt $B(n)$, pour n premier avec N , sont auto-adjointe par rapport à la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\text{Pic}(X)$ et sont donc simultanément diagonalisables sur $P_{\mathbb{R}} := \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$, car elles commutent deux à deux. L'algèbre \mathbb{B} est donc semi-simple et puisque les traces coïncident, elle est isomorphe à l'algèbre de Hecke sur $M_2(\Gamma_0(n), \mathbb{Q})$ engendrée par les opérateurs de Hecke T_n , pour n premier avec N [Piz80, p. 359].*

Preuve. Les matrices de Brandt sont auto-adjointes d'après la relation de symétrie 4.21.v. □

On va rendre explicite la correspondance entre l'action des opérateurs de Hecke sur $M_2(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})$ et celle des matrices de Brandt sur $P_{\mathbb{Q}}$.

Notation 4.27. On définit l'accouplement $\varphi : P_{\mathbb{Q}} \times P_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_2(\Gamma_0(N))$ par

$$\forall 1 \leq i, j \leq h, \quad \varphi(e_i, e_j) = w_j \theta_{i,j}.$$

Proposition 4.28. Soit $a, b \in P_{\mathbb{Q}}$. On a les propriétés suivantes.

- i. $\varphi(a, a_E) = \deg a \cdot E$,
- ii. le premier coefficient de Fourier $a_1(\varphi(a, b))$ est égal à $\langle a, b \rangle$,
- iii. pour tout n premier avec N , $\varphi(B(n)a, b) = \varphi(a, B(n)b) = \varphi(a, b) | T_n$, où T_n est le n -ième opérateur de Hecke,
- iv. si $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_2(\Gamma_0(N))$ est une forme propre de Hecke nouvelle et normalisée, alors il existe une unique droite dirigée par un vecteur $a_f \in P_{\mathbb{Q}}$ tel que, pour tout p premier ne divisant pas N , $B(p)a_f = a_p a_f$ et de plus, $\varphi(a_f, b) = \langle a_f, b \rangle \cdot f$.

Preuve.

- i. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour $a = e_i$ et donc

$$\varphi(e_i, a_E) = \sum_{j=1}^n w_j^{-1} \varphi(e_i, e_j) = \sum_{j=1}^n \theta_{i,j} = E = \deg e_i \cdot E.$$

- ii. Puisque $a_1 \circ \varphi$ est une forme bilinéaire sur $\text{Pic}(X)$, il suffit de le vérifier pour $a = e_i$ et $b = e_j$, or $\varphi(e_i, e_j) = w_j \theta_{i,j}$, dont le premier coefficient de Fourier est $w_i B_{ij}(1) = w_i \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$.
- iii. À nouveau, on le vérifie pour $a = e_i$ et $b = e_j$ et puisque les $B(p)$, pour p premier ne divisant pas N engendrent \mathbb{B} , et que matrices de Brandt et les opérateurs de Hecke vérifient les mêmes relations, il suffit de le vérifier pour les $B(p)$ et les T_p . D'une part,

$$\varphi(B(p)e_i, e_j) = \sum_{1 \leq k \leq h} B_{ik}(p) \varphi(e_k, e_j) = \sum_{1 \leq k \leq h} B_{ik}(p) w_j \theta_{kj} = \sum_{n \geq 0} w_j \sum_{1 \leq k \leq h} B_{ik}(p) B_{kj}(n) q^n,$$

or, puisque $\sum_{1 \leq k \leq h} B_{ik}(p) B_{kj}(n) = (B(p)B(n))_{ij}$, on a

$$w_j \sum_{1 \leq k \leq h} B_{ik}(p) B_{kj}(n) = \langle B(p)B(n)e_i, e_j \rangle = \langle e_i, B(n)B(p)e_j \rangle = w_j \sum_{1 \leq k \leq h} B_{kj}(p) B_{ik}(n).$$

Et donc on a bien

$$\varphi(e_i, B(p)e_j) = \sum_{1 \leq k \leq h} B_{jk}(p) \varphi(e_i, e_k) = \sum_{1 \leq k \leq h} B_{jk}(p) w_k \theta_{ik} = \sum_{1 \leq k \leq h} B_{kj}(p) w_j \theta_{ki} = \varphi(B(p)e_i, e_j).$$

Enfin, l'action des opérateurs de Hecke T_p est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi(e_i, e_j) | T_p &= w_j \left(\sum_{n \geq 0} B_{ij}(n) q^n \right) | T_p \\ &= w_j \sum_{p|n} (B_{ij}(np) + p B_{ij}(n/p)) q^n + \sum_{p \nmid n} B_{ij}(np) q^n \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\varphi(B(p)e_i, e_j) = w_j \sum_{n \geq 0} \sum_{1 \leq k \leq h} B_{ik}(p) B_{kj}(n) q^n = \sum_{n \geq 0} (B(n)B(p))_{ij} q^n,$$

et d'après les propriétés des matrices de Brandt données en 4.21, si $p|n$ et $n = n'p^{r+1}$ avec $p \nmid n'$, alors on a

$$B(p)B(n) = B(p)B(n')B(p^{r+1}) = B(n')(B(p^{r+2}) + pB(p^r)) = B(np) + pB(n/p),$$

et si $p \nmid n$, alors $B(p)B(n) = B(pn)$, ce qui correspond finalement l'action des opérateurs de Hecke décrite plus haut.

iv. L'existence de a_f provient du fait que les algèbres \mathbb{B} et l'algèbre de Hecke engendrée par les T_p , $(p, N) = 1$ sont isomorphes. L'unicité (à multiplication par un scalaire près) provient du théorème de multiplicité un [Bum98]. En outre, le point iii. montre que $\varphi(a_f, b)$ est propre pour les opérateurs de Hecke, de mêmes valeurs propres que f , et puisque d'après le point ii. on a $a_1(\varphi(a_f, b)) = \langle a_f, b \rangle$, le théorème de multiplicité un nous permet d'affirmer que $\varphi(a_f, b) = \langle a_f, b \rangle f$, la forme f étant normalisée.

□

4.3 Courbes elliptiques supersingulières

Dans le cas particulier de l'algèbre de quaternions $B_{\{p, \infty\}}$ ramifiée uniquement en une place finie p , on peut établir une correspondance entre les ordres maximaux et certaines courbes elliptiques en caractéristique p .

Soit K un corps commutatif quelconque. On tire les deux résultats suivant de [Sil09, p. 100, théorème 9.3] et [Sil09, p. 109, exercice 3.18].

Théorème 4.29. *Soit A un anneau intègre de caractéristique nulle tel que*

- i. A est un \mathbb{Z} -module de rang au plus 4,
- ii. A est muni d'une anti-involution $a \mapsto \hat{a}$ telle que

$$\forall a, b \in A, \forall x \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{a + b} = \hat{a} + \hat{b}, \quad \widehat{ab} = \hat{a}\hat{b}, \quad \hat{\hat{a}} = a, \quad \hat{x} = x,$$

- iii. Pour tout $a \in A$, $\hat{a}\hat{a}$ est un entier positif ou nul et $\hat{a}\hat{a} = 0$ si et seulement si $a = 0$.

Alors A est soit isomorphe à \mathbb{Z} , soit est un ordre dans une extension quadratique imaginaire de \mathbb{Q} , soit est un ordre dans une algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} .

Corollaire 4.30. *L'anneau des endomorphismes $\text{End}(E)$ d'une courbe elliptique E/K est soit \mathbb{Z} , soit un ordre dans une extension quadratique imaginaire de \mathbb{Q} , soit un ordre dans une algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} . De plus, si $B = \text{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est une algèbre de quaternions, alors*

- i. K est de caractéristique $p > 0$,
- ii. B est l'unique algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} ramifiée aux places ∞ et en p ,
- iii. $\text{End}(E)$ est un ordre maximal de B .

Ceci suggère donc une correspondance entre ordres maximaux des algèbres de quaternions ramifiées en deux places et les anneaux d'endomorphismes de rang 4 des courbes elliptiques en caractéristique non nulle. On rappelle donc la notion de courbe elliptique supersingulière.

Soit K un corps de caractéristique $p > 0$. Si E est une courbe elliptique sur K , on note $\text{Fr}_r : E \rightarrow E^{(p^r)}$ la r -ième itération du Frobenius sur E . Pour $m > 0$ entier, on note $E[m]$ les points de m -torsion de E .

Proposition 4.31. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $E[p^r] = 0$ pour un entier $r \geq 1$,
2. $\widehat{\text{Fr}}_r$ est purement inséparable pour un entier $r \geq 1$,
3. L'application $p : E \rightarrow E$ de multiplication par p est purement inséparable et $j(E) \in \mathbb{F}_{p^2}$,
4. $\text{End}(E)$ est un ordre dans une algèbre de quaternions.

Définition 4.32. Une courbe elliptique E sur K est dite *supersingulière* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes précédentes.

Plus largement, on peut faire le lien entre les morphismes de courbes supersingulières en caractéristique p et les classes idéaux à gauche de l'algèbre de quaternions $B = B_{\{p, \infty\}}$ ramifiée aux places p et ∞ .

Proposition 4.33. Soit E_0 une courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ et $R_0 = \text{End}(E_0)$ l'ordre maximal de B correspondant. On a une équivalence de catégories entre la catégorie des courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ (pour les isogénies) et la catégorie des R_0 -modules à gauche (pour les morphismes non nuls de R_0 -modules à gauche), via le foncteur

$$E \mapsto \text{Hom}(E, E_0).$$

En particulier, il existe une bijection entre les classes d'isomorphisme des courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ et les classes d'idéaux à gauche de R_0 , et si une courbe E correspond à une classe I , alors $\text{End}(E) \simeq R_d(I)$.

Preuve. Voir [Voi21, p. 791, théorème 42.3.2]. □

On peut même être plus précis et caractériser les points supersinguliers de la courbe modulaire $X_0(N_1)$ en caractéristique p en terme d'algèbres de quaternions, où $p \nmid N_1$, en suivant [Mes86].

Définition 4.34. Un point supersingulier de la courbe $X_0(N_1)$ en caractéristique p est un couple (E, C) , où E est une courbe elliptique supersingulière sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ et C est un sous-groupe cyclique de E d'ordre N_1 . On identifie deux points supersinguliers (E, C) et (E', C') aux isogénies $\varphi : E \rightarrow E'$ qui envoient C sur C' près.

Proposition 4.35. Soit S_0 un point supersingulier de $X_0(N_1)$ en caractéristique p et $R_0 = \text{End}(S_0)$ (au sens des morphismes de points supersinguliers), qui est un ordre d'Eichler de niveau N_1 de B . Alors on dispose d'une bijection entre les points supersinguliers de $X_0(N_1)$ de niveau p à isomorphisme près et les classes à gauche de R_0 , via

$$S \mapsto \text{Hom}(S, S_0).$$

On peut donc former

$$M_N = \bigoplus_S \mathbb{Z}[S],$$

où S décrit l'ensemble des points supersinguliers, de sorte que l'on a directement $M_N \simeq \text{Pic}(X)$ en tant que \mathbb{Z} -modules. On peut alors se demander comment faire définir intrinsèquement les opérateurs de Hecke sur M_N . Pour cela, on définit simplement pour n premier avec p ,

$$T_n(E, C) = \sum_{C_n} (E/C_n, (C + C_n)/C_n),$$

où C_n parcourt les sous-groupes d'ordres n de E pour lesquels $C_n \cap C = \emptyset$. Ces opérateurs coïncident alors bien avec l'action des matrices de Brandt sur $\text{Pic}(X)$.

5 L'élément diagonal et la formule de Gross-Kudla

5.1 Un premier pas : la formule de Siegel-Weil

Afin d'exprimer la valeur centrale (en $s = 2$) de la fonction $L(f \otimes g \otimes h, s)$, nous allons d'abord utiliser une généralisation de la formule de Siegel-Weil démontrée par Kudla et Rallis [KR88], qui nous permettra d'évaluer en $s = 0$ (ce qui revient à évaluer la fonction L de F en $s = 2$) la série d'Eisenstein $E(g, s, \Phi(s))$ dans la représentation intégrale de la proposition 2.20 de la fonction $L(F, s)$, et de l'exprimer comme l'intégrale d'une série thêta.

Il convient tout d'abord de remarquer que si $\varepsilon = -\prod_{p|N} \varepsilon_p$ (défini à la partie 2.1) vaut -1 , alors d'après l'équation fonctionnelle de $L(F, s)$, alors $L(F, 2) = 0$.

On se concentre ici dans le cas où $\varepsilon = 1$, et où il existe donc un nombre impair de diviseurs premiers p de N tels que $\varepsilon_p = -1$ et on considère S l'ensemble de ces places, auxquelles on ajoute la place ∞ . Soit alors B l'algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} ramifiée aux places contenues dans S (qui sont donc bien en nombre pair), et Tr_B sa trace réduite et $N(\cdot)$ sa norme réduite. Notons que cette algèbre de quaternions est entièrement déterminée par F . Soit R un ordre d'Eichler de B , de niveau N , on notera comme

d'habitude $R_p = R \otimes \mathbb{Q}_p$ pour toute place p de \mathbb{Q} .

Nous allons introduire la notion de représentation de Weil, dont nous allons nous servir pour construire rapidement des représentations appartenant à $I(s)$ ou $I_p(s)$. Pour cela, on suit l'exposition de [JL70, p. 1], d'après les résultats de [Wei64].

Soit ψ le caractère additif de \mathbb{A} tel que ses localisés ψ_p ont pour conducteur \mathbb{Z}_p . On note V le \mathbb{Q} -espace vectoriel de même ensemble sous-jacent que B , muni de la forme quadratique N , dont la forme bilinéaire associée est simplement donné par $(x, y) = \text{Tr}_B(x\bar{y})$. On note $O(V)$ le groupe orthogonal associé à V .

Proposition 5.1. *Soit p une place finie de \mathbb{Q} . Pour le caractère ψ_p , il existe une unique représentation $\omega_p^{(1)}$ de $\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{S}(V_p)$ (l'espace de Schwartz-Bruhat), dite de Weil, telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(V_p)$,*

- i. $\forall a \in \mathbb{Q}_p^\times, \omega_p^{(1)} \left(\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \right) (\varphi)(x) = |a|^{\frac{1}{2}} \varphi(ax),$
- ii. $\forall b \in \mathbb{Q}_p, \omega_p^{(1)} \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \right) (\varphi)(x) = \psi_p \circ \text{Tr}_{B_p}(bN(x)) \varphi(x),$
- iii. $\omega_p^{(1)} \left(\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right) (\varphi)(x) = \varepsilon_p \hat{\varphi}(x),$

où

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{B_p} \psi \circ \text{Tr}_{B_p}(x\bar{y}) \varphi(y) dy$$

est la transformée de Fourier de φ , avec dy la mesure auto-duale de B_p .

On étend alors cette définition pour former une représentation de Weil ω de $G^1(\mathbb{A}) := \text{Sp}_3(\mathbb{A})$ sur l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}(V(\mathbb{A})^3)$, qui commute avec l'action naturelle de $O(V)(\mathbb{A})$ [Wei64]. Plus précisément, si $\varphi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A})^3)$, pour tout $x \in V(\mathbb{A})^{\otimes 3}$,

$$\forall b \in \text{Sym}_2(\mathbb{A}), \quad \omega(n(b))(\varphi)(x) = \psi \circ \text{Tr}(bN(x)) \varphi(x) \quad (5.2)$$

$$\forall a \in \text{GL}_3(\mathbb{A}), \quad \omega(m(a, 1))(\varphi)(x) = |\det a|^2 \varphi(ax) \quad (5.3)$$

Remarque 5.4. Puisque $\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ se plonge diagonalement dans $\text{Sp}_3(\mathbb{Q}_p)$ (via $H(\mathbb{Q}_p) \cap G^1(\mathbb{Q}_p) = \text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)^3$), on peut restreindre l'action des localisés aux places finies p de ω à $\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)^3$, ce qui donne la représentation $\omega_p^{(3)} := \omega_p^{(1)\otimes 3}$ (par unicité de la représentation de Weil).

Remarque 5.5. En particulier, si les $w_i, i = 0, \dots, 3$ sont les éléments définis en 2.11, alors comme w_i est l'image dans G^1 de l'élément $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{3-i \text{ fois}}, \underbrace{\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}}_{i \text{ fois}} \right)$ de H , l'action de $\omega(w_i)$ sur

$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3$ est triviale sur les $3-i$ premières composantes et donnée par l'équation iii. de la proposition 5.1 sur les i dernières.

Définissons maintenant la série thêta définie à partir de l'action de ω et des sections plates de $I(s)$ associées.

Notation 5.6. Soit $\varphi = \otimes_v \varphi_v \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A}))$, avec pour toute place p finie φ_p la fonction caractéristique de R_p et $\varphi_\infty = e^{-2\pi N(\cdot)}$. On considère $\tilde{\varphi} = \varphi^{\otimes 3} \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A}))^{\otimes 3}$. On forme la fonction thêta

$$\forall g \in G^1(\mathbb{A}), \forall r \in O(V(\mathbb{A})), \quad \theta(g, r, \tilde{\varphi}) = \sum_{x \in V(\mathbb{Q})^3} (\omega(g)\tilde{\varphi})(r^{-1}x), \quad (5.7)$$

ainsi que son intégrale

$$I(g, \tilde{\varphi}) = \int_{O(V(\mathbb{Q})) \backslash O(V(\mathbb{A}))} \theta(g, r, \tilde{\varphi}) dr,$$

avec dr la mesure de Haar de $O(V(\mathbb{Q})) \backslash O(V(\mathbb{A}))$ normalisée telle que $\text{vol}(O(V)(\mathbb{Q})) \backslash O(V)(\mathbb{A}), dr = 1$.

Remarque 5.8. La série $\theta(g, r, \tilde{\varphi})$ est $G^1(\mathbb{Q})$ -invariante à gauche comme une fonction de g et $O(V)(\mathbb{Q})$ -invariante à gauche comme une fonction de r . En outre, B est une algèbre à division, donc l'espace quadratique V est anisotrope (car $N(x) = x\bar{x}$), donc l'espace $O(V)(\mathbb{Q}) \setminus O(V)(\mathbb{A})$ est compact et donc l'intégrale $I(g, \tilde{\varphi})$ (et la mesure dr) sont bien définies.

Remarque 5.9. Pour $g = nm(a, \lambda)k \in G(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})K$, les quantités $|a(g)| := |\det a|_{\mathbb{A}}$ et $|\lambda(a)| := |\lambda|_{\mathbb{A}}$ sont uniquement déterminées par g , bien que $a(g)$ et $\lambda(g)$ ne le soient pas.

Notation 5.10. Pour $g \in G(\mathbb{A})$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$, soit

$$\Phi_{\text{flat}}(g, s) = |\lambda(g)|^{-3s-3}(\omega(g_1)\tilde{\varphi})(0) \cdot |a(g)|^{2s},$$

$$\text{où } g_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda(g)^{-1} \end{pmatrix} g.$$

Remarque 5.11. La restriction de Φ_{flat} à K est indépendante de s (puisque $|a(K)| = 1 = |\lambda(K)|$), d'où l'indice "flat".

Remarque 5.12. La fonction $g \mapsto \Phi_{\text{flat}}(g, s)$ est un élément de $I(s)$, car pour $g = nm(a, \lambda)k \in G^1(\mathbb{A})$ et $n' \in N(\mathbb{A})$, $m(a', \lambda') \in M(\mathbb{A})$, on a

$$n'm(a', \lambda')k = n'm(a', \lambda')nm(a, \lambda)k = \tilde{n}m(a'a, \lambda\lambda')k,$$

avec $\tilde{n} \in N(\mathbb{A})$, donc d'après les lois (5.2) et (5.3) de transformation de ω ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{flat}}(n'm(a', \lambda')g, s) &= |\lambda'\lambda|^{-3s-3}(\omega(\tilde{n}m(a'a, 1)k)\tilde{\varphi})(0) \cdot |\det(a'a)|^{2s} \\ &= |\lambda'|^{-3s-3}|\det(a')|^{2s}|\det(a')|^2|\lambda(g)|^{-3s-3}(\omega(m(a, 1)k)\tilde{\varphi})(0) \cdot |a(g)|^{2s} \\ &= \chi_s(n'm(a', \lambda'))\Phi_{\text{flat}}(g, s), \end{aligned}$$

où χ_s est le produit des $\chi_{s,v}$ locaux.

Proposition 5.13. *Puisque $g \mapsto \Phi_{\text{flat}}(g, s) \in I(s)$, on peut considérer sa série d'Eisenstein $E(g, s, \Phi_{\text{flat}})$, comme définie en 2.18, qui se prolonge méromorphiquement au plan complexe en s et est en particulier holomorphe en $s = 0$. D'après la formule de Siegel-Weil, on a alors*

$$E(g, 0, \Phi_{\text{flat}}) = 2I(g, \tilde{\varphi}).$$

Il nous reste donc à relier la valeur en $s = 0$ de cette nouvelle série d'Eisenstein à celle étudiée précédemment. Pour cela, on va établir la proposition suivante.

Proposition 5.14. *Soit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A}))^{\otimes 3}$ comme définie en 5.6 et pour une place p finie, soit $\tilde{\varphi}_p = \varphi_p^{\otimes 3}$ sont localisé en p .*

i. *Si $p \nmid N$, alors pour tout $g \in G^1(\mathbb{Q}_p)$,*

$$\Phi_{\text{flat},p}(g, 0) = (\omega(g)\tilde{\varphi}_p)(0) = \Phi_{K_p}(g, 0),$$

où $\Phi_{K_p(s)}$ est la section K_p -invariante de $I_p(s)$ définie en 2.14.

ii. *Si $p \mid N$, alors pour tout $g \in G^1(\mathbb{Q}_p)$,*

$$\Phi_{\text{flat},p}(g, 0) = (\omega(g)\tilde{\varphi}_p)(0) = \Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(g, 0),$$

où $\Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}$ a été définie en 2.14.

Preuve. Puisque l'on a des éléments de $I_p(s)$, il suffit de montrer ces égalités pour $g = k \in K_p \cap G^1(\mathbb{Q}_p)$.

Lemme 5.15. *La transformée $\hat{\varphi}_p$ de φ_p est égale à $\kappa_p \mathbf{1}_{\hat{R}_p}$, où*

$$\hat{R}_p = \{x \in B_p \mid \forall y \in R_p, \text{Tr}_{B_p}(x\bar{y}) \in \mathbb{Z}_p\}$$

est l'inverse de la différentielle de R_p et $\kappa_p := \text{vol}(R_p, dx)$ vaut p^{-1} si $p \mid N$ et 1 sinon.

Preuve. On a

$$\hat{\varphi}_p(x) = \int_{B_p} \psi_p \circ \text{Tr}_{B_p}(x\bar{y}) \varphi_p(y) dy = \int_{R_p} \psi_p \circ \text{Tr}_{B_p}(x\bar{y}) dy.$$

Or, le conducteur de ψ_p est \mathbb{Z}_p , donc si $x \notin \hat{R}_p$, alors il existe $y \in R_p$ tel que $\psi \circ \text{Tr}_{B_p}(x\bar{y}) \neq 1$, et donc par translation, $\hat{\varphi}_p(x) = 0$. Donc

$$\hat{\varphi}_p(x) = \mathbf{1}_{\hat{R}_p}(x) \int_{R_p} \underbrace{\psi_p \circ \text{Tr}_{B_p}(x\bar{y})}_{= 1 \text{ si } x \in \hat{R}_p} dy = \kappa_p \mathbf{1}_{\hat{R}_p}(x).$$

□

Lemme 5.16. La fonction $\tilde{\varphi}_p$ est $K_0(p)$ -invariante (sous l'action issue ω_p).

Preuve. On se permet de noter momentanément $\varphi = \tilde{\varphi}_p$. On utilise le fait que tout élément $k = \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in K_0(p) \cap G^1(\mathbb{Q}_p)$ se décompose

$$k = \begin{pmatrix} 1 & bd^{-1} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t d^{-1} & \\ & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ pd^{-1}c & 1 \end{pmatrix},$$

et puisque $d \in \text{GL}_3(\mathbb{Z}_p)$, on a $|\det d| = 1$ et donc

$$\omega(k)(\varphi)(x) = \psi \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(bd^{-1}(x, x)_3) \right) \cdot \omega \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ pd^{-1}c & 1 \end{pmatrix} \right) (\varphi)(x {}^t d^{-1}),$$

où $(x, y)_3$ désigne la matrices $(\text{Tr}(x_i \bar{y}_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$. Or,

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ pd^{-1}c & 1 \end{pmatrix} = w_3 \begin{pmatrix} 1 & -pd^{-1}c \\ & 1 \end{pmatrix} w_3^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned} \omega \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ pd^{-1}c & 1 \end{pmatrix} \right) (\varphi)(x {}^t d^{-1}) &= \varepsilon_p \int_{V_p^3} \psi \circ \text{Tr}(d^{-1}(x, y)_3) \omega \left(\begin{pmatrix} 1 & -pd^{-1}c \\ & 1 \end{pmatrix} w_3^{-1} \right) (\varphi)(y) dy \\ &= \varepsilon_p \int_{V_p^3} \psi \circ \text{Tr}(d^{-1}(x, y)_3) \psi \circ \text{Tr}_3(-\frac{1}{2}pd^{-1}c(y, y)_3) \omega(-w_3)(\varphi)(y) dy \\ &= \int_{V_p^3} \psi \circ \text{Tr}(d^{-1}(x, y)_3) \psi \circ \text{Tr}_3(-\frac{1}{2}pd^{-1}c(y, y)_3) \hat{\varphi}(-y) dy \\ &= \kappa_p^3 \int_{\hat{R}_p^3} \psi \circ \text{Tr}(d^{-1}(x, y)_3) \psi \circ \text{Tr}_3(-\frac{1}{2}pd^{-1}c(y, y)_3) dy, \end{aligned}$$

d'après le lemme 5.15. Or, si $x, y \in \hat{R}_p$, alors $\text{Tr}_{B_p}(x\bar{y}) \in \kappa_p \mathbb{Z}_p$ (car \hat{R}_p est conjugué à $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & N^{-1}\mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$), donc si on note $A = d^{-1}c$, on a

$$\text{Tr}(A(y, y)_3) = 2 \sum_i A_{ii} \langle y_i, y_i \rangle + 2 \sum_{i < j} A_{ij} \langle y_i, y_j \rangle \in 2\kappa_p \mathbb{Z}_p,$$

d'où $\text{Tr}_3(-\frac{1}{2}pd^{-1}c(y, y)_3) \in \mathbb{Z}_p$, et donc notre intégrale est simplement égale à

$$\kappa_p^3 \int_{\hat{R}_p^3} \psi \circ \text{Tr}(d^{-1}(x, y)_3) dy = \kappa_p^3 \text{vol}(\hat{R}_p, dy)^3 \mathbf{1}_{\hat{R}_p}(x) = \mathbf{1}_{\hat{R}_p}(x) = \tilde{\varphi}_p(x),$$

c'est donc le résultat voulu, puisque pour $x \in \hat{R}_p^3$,

$$\psi \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(bd^{-1}(x, x)_3) \right) = 1.$$

□

En appliquant directement le lemme précédent, on déduit que $\omega(g)(\tilde{\varphi}_p)(0)$ est un élément de $I_p(0)^{K_0(p)}$ comme une fonction de g . Or, d'après la remarque 5.5, $\omega(w_j)(\tilde{\varphi}_p)(0) = (\varepsilon_p \kappa_p)^j$ (puisque $0 \in R_p \cap \hat{R}_p$, évidemment). Par conséquent, on a nécessairement

$$\omega(g)(\tilde{\varphi}_p)(0) = \sum_j (\varepsilon_p \kappa_p)^j \Phi_j(g, 0),$$

ce qui est exactement le résultat énoncé.

□

Finalement, c'est ce résultat qui explique les choix des sections locales $\Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}$, et qui permettent ensuite d'appliquer la formule de Siegel-Weil, dont on savait déjà qu'elle permettait de résoudre la conjecture de Jacquet de manière non-explicite [HK91].

Proposition 5.17.

$$\begin{aligned} L(F, 2) &= 2b(0)\xi(0)^{-1}L_\infty(F, 2)^{-1} \int_{Z_G(\mathbb{A})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})} \tilde{F}(g)\overline{I(g, \tilde{\varphi})} dg \\ &= 2^{10-t}\pi^2 \frac{N}{24} \prod_{p|N} (p+1)^3 (1 + \varepsilon_p p^{-1})^2 \int_{Z_G(\mathbb{A})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})} \tilde{F}(g)\overline{I(g, \tilde{\varphi})} dg, \end{aligned}$$

où t est le nombre de diviseurs premiers de N et \tilde{F} a été définie en (2.19).

Preuve. Notons

$$\Psi(g, s) = \Phi_\infty^{-2}(g_\infty, s) \prod_{p|N} \Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(g_p, s) \prod_{p|N} \Phi_{K_p}(g_p, s) = \xi(s) \cdot \Phi^\sharp(g, s),$$

et $\Phi(g, s) = \overline{\Psi(g, \bar{s})}$, avec $\xi(s) = \xi_\infty(s) \prod_{p|N} \xi_p(s)$, tels que définis en 3.1 et 2.10. On considère la section

$$\Phi(g, s) = \overline{\Psi(g, \bar{s})} = \Phi_\infty^2(g_\infty, s) \prod_{p|N} \Phi_{R_p}^{\varepsilon_p}(g_p, s) \prod_{p|N} \Phi_{K_p}(g_p, s),$$

de sorte que $\Phi_{\text{diff}}(g, s) = \Phi(g, s) - \Phi_{\text{flat}}(g, s)$ s'annule en $s = 0$. Alors d'une part

$$E(g, \bar{s}, \Psi) = E(g, s, \Phi) = \overline{E(g, s, \Phi)} = \overline{E(g, s, \Phi_{\text{diff}})} + \overline{E(g, s, \Phi_{\text{flat}})},$$

et $E(g, s, \Phi^\sharp) = \xi(s)^{-1}E(g, s, \Psi)$, donc d'après la formule de Siegel-Weil 5.13,

$$\begin{aligned} E(g, s, \Phi^\sharp(s))|_{s=0} &= \xi(0)^{-1}E(g, s, \Psi)|_{s=0} \\ &= \xi(0)^{-1}\overline{E(g, \bar{s}, \Phi_{\text{diff}})}|_{s=0} + \xi(0)^{-1}\overline{E(g, \bar{s}, \Phi_{\text{flat}})}|_{s=0} \\ &= 2\xi(0)^{-1}\overline{I(g, \tilde{\varphi})}. \end{aligned}$$

□

De manière classique, on ré-écrit la forme intégrale de $L(F, 2)$, avec la mesure $d\mu(z) = \prod_{j=1}^3 \frac{dx_j dy_j}{y_j^2}$ sur \mathfrak{h}^3 (en la variable $z = (z_1, z_2, z_3)$, $z_j = x_j + iy_j$).

Proposition 5.18.

$$L(F, 2) = \frac{2^{7-t}\pi^5 N}{24^2} \prod_{p|N} (1 + \varepsilon_p p^{-1})^2 \int_{\Gamma_0(N)^3 \backslash \mathfrak{h}^3} F(z) j(g_\infty, i)^{-2} \overline{I(g_\infty, \tilde{\varphi})} d\mu(z),$$

où $g_\infty = (g_1, g_2, g_3)$ et $g_j = \begin{pmatrix} 1 & x_j \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j & \\ & a_j^{-1} \end{pmatrix}$, avec $a_j = y_j^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve. Voir [GK92, p. 186, équation (9.5)].

□

Remarque 5.19. On calcule $j(g_\infty, i)^{-2} = y_1 y_2 y_3$, de sorte que

$$L(F, 2) = \frac{2^{7-t} \pi^5 N}{24^2} \prod_{p|N} (1 + \varepsilon_p p^{-1})^2 \int_{\Gamma_0(N)^3 \backslash \mathfrak{h}^3} F(z) \overline{I(g_\infty, \tilde{\varphi})} y_1 y_2 y_3 d\mu(z),$$

et on reconnaît presque l'expression d'un produit scalaire de Petersson.

Il s'agit donc d'exprimer $I(g_\infty, \tilde{\varphi})$ sous une forme plus commode, plutôt que comme l'intégrale d'une série thêta sur le groupe orthogonal de V . Pour cela, on va construire une application surjective et propre

$$(Z_M(\mathbb{R})^+ M(\mathbb{Q})) \backslash M(\mathbb{A}) \times C \longrightarrow O(V)(\mathbb{Q}) \backslash O(V)(\mathbb{A}), \quad (5.20)$$

avec C qui s'identifie à un sous-groupe compact de $O(V)(\mathbb{A})$,

$$M = (B^\times(\mathbb{Q}) \times B^\times(\mathbb{Q}))_0 = \{(b_1, b_2) \in B^\times(\mathbb{Q}) \times B^\times(\mathbb{Q}) \mid N(b_1) = N(b_2)\}$$

et $Z_M \subset M$ est le plongement diagonal du centre de $B^\times(\mathbb{Q})$ dans $B^\times(\mathbb{Q}) \times B^\times(\mathbb{Q})$. De manière classique, on a un isomorphisme $M/Z_M \simeq SO(V)$.

On va étendre cet isomorphisme pour décrire $O(V)$ tout entier. Pour cela, on considère l'involution $\tau : M \rightarrow M$ définie par

$$\forall (b_1, b_2) \in M, \quad \tau(b_1, b_2) = (b_2/N(b_2), b_1/N(b_1)).$$

On rappelle que $N(b_1) = N(b_2)$. C'est bien une involution, puisque $N(b_j N(b_j)^{-1}) = N(b_j) N(b_j)^{-2} = N(b_j)^{-1}$. Obtient donc une surjection

$$\rho : M \rtimes \langle \tau \rangle \rightarrow O(V),$$

définie pour tout $x \in V$ par

$$\forall (b_1, b_2) \in M, \quad \rho(b_1, b_2)(x) = b_1^{-1} x b_2^{-1} \quad \text{et} \quad \rho(\tau)(x) = \bar{x}.$$

Pour vérifier que ρ est ainsi bien défini, il suffit de vérifier que pour tout $x \in V$,

$$\forall (b_1, b_2) \in M, \quad \rho \circ \tau(b_1, b_2)(x) = \rho(\tau) \circ \rho(b_1, b_2) \circ \rho(\tau)^{-1}(x).$$

Et on voit directement que puisque $N(b_1) = b_1 \bar{b}_1$,

$$\begin{aligned} \rho(\tau) \circ \rho(b_1, b_2) \circ \rho(\tau)^{-1}(x) &= \bar{b}_2^{-1} x \bar{b}_1 \\ &= \bar{b}_2^{-1} b_2^{-1} b_2 x \bar{b}_1 b_1 b_1^{-1} \\ &= \left(\frac{b_2}{N(b_2)} \right) x \left(\frac{b_1}{N(b_1)} \right)^{-1} = \rho \circ \tau(b_1, b_2)(x). \end{aligned}$$

Le noyau de ρ est Z_M , et ρ est surjectif puisque $\rho(\tau) \notin SO(V)$, ce qui induit la suite exacte

$$1 \rightarrow Z_M \rightarrow M \rtimes \langle \tau \rangle \rightarrow O(V) \rightarrow 1.$$

Maintenant, pour l'ordre d'Eichler R considéré précédemment, soit $\hat{R} = R \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ et $K_M = (\hat{R}^\times \times \hat{R}^\times)_0$, de sorte que K_M est un sous-groupe compact de $M(\mathbb{A}_f)$. Pour chaque place v , on étend τ en une involution $\tau_v : M(\mathbb{Q}_v) \rightarrow M(\mathbb{Q}_v)$ et on note $C = \prod_v \langle \tau_v \rangle$, qui s'identifie par ρ à un sous-groupe compact de $O(V)(\mathbb{A}_f)$ et on munit donc C de la topologie correspondante.

Construisons maintenant une mesure sur $M(\mathbb{A})$. Sur $M(\mathbb{A}_f)$, on fixe la mesure de Haar pour laquelle le sous-groupe compact ouvert K_M est de volume 1. On peut en outre écrire $M(\mathbb{R}) \cong Z_M(\mathbb{R})^+ \cdot M(\mathbb{R})^1$, avec $M(\mathbb{R})^1$ le groupes des éléments $(b_1, b_2) \in M(\mathbb{R})$ de norme 1 et $Z_M(\mathbb{R})^+$ identifié à \mathbb{R}_+^\times . On choisit donc dm sur $M(\mathbb{R})$ le produit de $d^\times z = \frac{dz}{z}$ la mesure de Haar sur \mathbb{R}_+^\times et de la mesure de Haar sur le

groupe compact $M(\mathbb{R})^1$ telle que $\text{vol}(M(\mathbb{R})^1) = 1$. On considère également de la mesure de Haar sur C telle que $\text{vol}(C) = 1$.

Maintenant, on pousse en avant par l'application (5.20) la mesure $dm \otimes dc$ en une mesure d_0r de $O(V)(\mathbb{Q}) \backslash O(V)(\mathbb{A})$ et qui vérifie

$$\int_{O(V)(\mathbb{Q}) \backslash O(V)(\mathbb{A})} f(r) d_0r = \int_{(Z_M(\mathbb{R})^+ M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A})) \times C} f(\rho(m, c)) dm dc. \quad (5.21)$$

Il s'agit maintenant de décomposer $(Z_M(\mathbb{R})^+ M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A})) \times C$ en respectant les symétries de la série $\theta(g, r, \tilde{\varphi})$ définie en (5.7). Pour cela, on considère la décomposition

$$B_{\mathbb{A}}^\times = \bigsqcup_{i=1}^n B^\times(\mathbb{Q}) B_{\mathbb{R}}^\times b_i \hat{R}^\times, \quad (5.22)$$

où les b_i sont des représentants des classes de $B^\times(\mathbb{Q}) B_{\mathbb{R}}^\times \backslash B_{\mathbb{A}}^\times / \hat{R}^\times$, que l'on peut choisir tels que $b_{i,\infty} = 1$ et $N(b_i) = 1$. On applique maintenant cette décomposition à $M(\mathbb{A})$.

Lemme 5.23.

i. En posant $m_{ij} = (b_i, b_j) \in M(\mathbb{A})$, on a

$$M(\mathbb{A}) = \bigsqcup_{1 \leq i, j \leq n} M(\mathbb{Q}) M(\mathbb{R}) m_{ij} K_M$$

ii. En posant $\Gamma_{ij} = M(\mathbb{Q}) \cap M(\mathbb{R}) m_{ij} K_M m_{ij}^{-1}$ et $\Gamma_i = B_{\mathbb{Q}}^\times \cap B_{\mathbb{R}}^\times b_i \hat{R}^\times b_i^{-1}$, alors Γ_{ij} et Γ_i sont finis et $\Gamma_{ij} \simeq \Gamma_i \times \Gamma_j$

Preuve. Voir [GK92, p. 188, lemme 9.1]. □

Ainsi, en notant $2w_i = |\Gamma_i|$ et $4w_{ij} = |\Gamma_{ij}| = w_i w_j$, en utilisant (5.21), on obtient

$$\text{vol}(O(V)(\mathbb{Q}) \backslash O(V)(\mathbb{A}), d_0r) = \text{vol}(Z_M(\mathbb{R})^+ M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}), dm) = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \frac{1}{w_{ij}} = \left(\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{w_i} \right)^2,$$

car d'une part $B^\times(\mathbb{Q}) B_{\mathbb{R}}^\times \backslash B_{\mathbb{A}}^\times / \hat{R}^\times \equiv B^\times(\mathbb{Q}) \backslash \hat{B}^\times / \hat{R}^\times$ et d'autre part $\mathbb{A}^\times B^\times(\mathbb{Q}) \backslash B_{\mathbb{A}}^\times = B^\times(\mathbb{Q}) \backslash B_{\mathbb{A}}^\times / \mathbb{R}^\times \mathbb{Q}^\times \hat{\mathbb{Z}}^\times$, donc puisque \hat{R}^\times contient une copie de $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ et $B_{\mathbb{R}}^\times$ contient $\mathbb{R}^\times \mathbb{Q}^\times$, on peut voir $\mathbb{A}^\times B^\times(\mathbb{Q}) \backslash B_{\mathbb{A}}^\times$ comme un quotient de $B^\times(\mathbb{Q}) B_{\mathbb{R}}^\times \backslash B_{\mathbb{A}}^\times / \hat{R}^\times$.

Par conséquent, $dr = \left(\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{w_i} \right)^{-2} d_0r$, où dr est la mesure de Haar telle que $\text{vol}(O(V)(\mathbb{Q}) \backslash O(V)(\mathbb{A}), dr) = 1$, et donc en appliquant (5.21) à la définition 5.6,

$$I(g_\infty, \tilde{\varphi}) = \left(\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{w_i} \right)^{-2} \int_{Z_M(\mathbb{R})^+ M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}) \times C} \theta(g_\infty, \rho(m, c), \tilde{\varphi}) dm dc.$$

Puisque $\tilde{\varphi}$ est invariante sous les actions de K_M , de C et de $M^1(\mathbb{R})$, on en déduit qu'il en est de même pour $\theta(g_\infty, \rho(m, c), \tilde{\varphi})$ en m et en c , donc

$$I(g_\infty, \tilde{\varphi}) = \left(\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{w_i} \right)^{-2} \frac{1}{4} \sum_{i,j} \frac{1}{w_i w_j} \theta(g_\infty, \rho(m_{ij}), \tilde{\varphi}). \quad (5.24)$$

Or, par définition de g_∞ donnée en 5.18 et de l'action de la représentation de Weil, pour $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in V(\mathbb{R})^3$,

$$\omega(g_\infty)(\tilde{\varphi})(\xi) = y_1 y_2 y_3 \psi_\infty \circ \text{Tr}(zN(\xi)) = y_1 y_2 y_3 \psi_\infty(z_1 N(\xi_1) + z_2 N(\xi_2) + z_3 N(\xi_3)).$$

On en déduit que

$$\theta(g_\infty, \rho(m_{ij}), \tilde{\varphi}) = y_1 y_2 y_3 \sum_{\xi \in (B_{\mathbb{Q}} \cap b_i \hat{R} b_j^{-1})^3} \psi_\infty \circ \text{Tr}(zN(\xi)) = 8y_1 y_2 y_3 w_j^3 \theta_{ij}(z_1) \theta_{ij}(z_2) \theta_{ij}(z_3). \quad (5.25)$$

En effet, en suivant la remarque 4.22, on peut imposer $g_i = \bar{b}_i = b_i^{-1}$, et alors on a

$$B_{\mathbb{Q}} \cap b_i \hat{R} b_j^{-1} = B_{\mathbb{Q}} \cap g_i^{-1} \hat{R} g_j = M_{ji},$$

donc on peut écrire, d'après le point v. de la propriété 4.21,

$$\forall z \in \mathfrak{h}, \quad w_i \theta_{ji}(z) = \frac{1}{2} \sum_{\xi \in B_{\mathbb{Q}} \cap b_i \hat{R} b_j^{-1}} \psi_\infty(zN(\xi)) = w_j \theta_{ij}(z),$$

et finalement, d'après la dernière égalité de (5.19),

$$\sum_{\xi \in (B_{\mathbb{Q}} \cap b_i \hat{R} b_j^{-1})^3} \psi_\infty \circ \text{Tr}(zN(\xi)) = \prod_{k=1}^3 \sum_{\xi_k \in B_{\mathbb{Q}} \cap b_i \hat{R} b_j^{-1}} \psi_\infty(z_k N(\xi_k)) = 8w_j^3 \theta_{ij}(z_1) \theta_{ij}(z_2) \theta_{ij}(z_3).$$

Par conséquent, en posant

$$\forall z \in \mathfrak{h}^3, \quad \Theta(z) = \sum_{i,j} \frac{1}{w_i w_j} w_j^3 \theta_{ij}(z_1) \theta_{ij}(z_2) \theta_{ij}(z_3),$$

on obtient

Proposition 5.26.

$$L(F, 2) = \frac{2^{8-t} \pi^5}{N} \int_{\Gamma_0(N)^3 \backslash \mathfrak{h}^3} F(z) \overline{\Theta(z)} (y_1 y_2 y_3)^2 d\mu(z).$$

Preuve. On a démontré, en combinant (5.24) et (5.25),

$$I(g_\infty, \tilde{\varphi}) = 2 \left(\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{w_i} \right)^{-2} y_1 y_2 y_3 \Theta(z),$$

donc d'après la proposition 5.18,

$$L(F, 2) = \frac{2^{8-t} \pi^5 N}{24^2} \prod_{p|N} (1 + \varepsilon_p p^{-1})^2 \left(\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{w_i} \right)^{-2} \int_{\Gamma_0(N)^3 \backslash \mathfrak{h}^3} F(z) (y_1 y_2 y_3)^2 \overline{\Theta(z)} d\mu(z).$$

On conclut en appliquant la formule de masse d'Eichler, [Voi21, p. 423, théorème 25.3.19],

$$\sum_i \frac{1}{w_i} = \frac{N}{24} \prod_{p|N} (1 + \varepsilon_p p^{-1}).$$

□

Finalement, on voit que la valeur centrale de F est à une période près le produit scalaire de Petersson $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre F et Θ . On peut décomposer orthogonalement $M_2(\Gamma_0(N), \mathbb{R})^{\otimes 3} = \langle F \rangle \oplus \langle F \rangle^\perp$, de sorte que $\langle F, \Theta \rangle = \langle F, \Theta_F \rangle$, où Θ_F est la composante de Θ selon la droite $\langle F \rangle$. Nous allons préciser l'expression de Θ_F dans la partie suivante, en voyant Θ comme un certain élément diagonal dans le pendant quaternionique de notre approche.

5.2 L'élément diagonal de Gross et Kudla

Soit $d > 0$ entier. On généralise les constructions de la section 4.2 à $P_{\mathbb{Q}}^{\otimes d}$. En particulier, on dispose des accouplements induits par le produit tensoriel

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : P_{\mathbb{Q}}^{\otimes d} \times P_{\mathbb{Q}}^{\otimes d} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \varphi : P_{\mathbb{Q}}^{\otimes d} \times P_{\mathbb{Q}}^{\otimes d} \rightarrow M_2(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})^{\otimes d}.$$

On notera q_1, \dots, q_d les composantes des variables de \mathfrak{h}^d . Des résultats pour $d = 1$, on généralise les propriétés suivantes,

Proposition 5.27.

- i. Soit $A, B \in P_{\mathbb{Q}}^d$. Le coefficient de Fourier associé à $q_1 \cdots q_d$ de $\varphi(A, B)^{\otimes d}$ vaut $\langle A, B \rangle^{\otimes d}$.
- ii. Si $F = f_1 \otimes \cdots \otimes f_d \in S_2(\Gamma_0(N), \mathbb{Q})^{\otimes d}$ est un produit de formes nouvelles propres et normalisées, si $A_F = a_{f_1} \otimes \cdots \otimes a_{f_d}$ est le vecteur propre de $P_{\mathbb{R}}^{\otimes d}$ correspondant, alors

$$\forall B \in P_{\mathbb{R}}^{\otimes d}, \quad \varphi^{\otimes d}(A_F, B) = \langle A_F, B \rangle^{\otimes d} \cdot F.$$

Notation 5.28. L'élément diagonal de Gross-Kudla est

$$\Delta = \sum_{1 \leq i \leq h} \frac{1}{w_i} e_i^{\otimes d},$$

en particulier pour $d = 1$, $\Delta = a_E$. On a directement

$$\varphi(\Delta, \Delta)^{\otimes 3} = \sum_{i,j} \frac{1}{w_i w_j} \theta_{i,j}^{\otimes 3}(q_1, q_2, q_3) = \Theta(q_1, q_2, q_3).$$

Considérons maintenant $d = 3$ et notre forme triple $F = f \otimes g \otimes h$. Pour $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\text{times}^3}$, on a la décomposition orthogonale

$$P_{\mathbb{R}}^{\otimes 3} = \langle A_F \rangle \oplus \langle A_F \rangle^{\perp}$$

et pour le produit scalaire de Petersson, on a la décomposition orthogonale

$$M_2(\Gamma_0(N), \mathbb{R})^{\otimes 3} = \langle F \rangle \oplus \langle F \rangle^{\perp},$$

qui est bien définie, car F est cuspidale. Pour $B \in P_{\mathbb{R}}^{\otimes 3}$ (resp. $G \in M_2(\Gamma_0(N), \mathbb{R})^{\otimes 3}$), on note B_F (resp. G_F) sa composante selon $\langle A_F \rangle$ (resp. $\langle F \rangle$). Selon cette notation, on a bien $A_F = A_F$, évidemment.

Proposition 5.29. On a

- i. $\Theta_F = \langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3} \cdot F$.
- ii. En outre, si pour $\psi \in M_2(\Gamma_0(N), \mathbb{R})$ cuspidale, nouvelle, propre et normalisée on note $a_{\psi} = \sum_i \lambda_i(\psi) e_i$, on a

$$\langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3} = \frac{(\sum_i w_i^2 \lambda_i(f) \lambda_i(g) \lambda_i(h))^2}{(\sum_i w_i \lambda_i(f)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(g)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(h)^2)}$$

Preuve.

- i. Considérons le projecteur spectral $p_F : M_2(N)_{\mathbb{R}}^{\otimes 3} \rightarrow \langle F \rangle$, qui est un polynôme en chaque élément T_p , $p \nmid N$ premier de l'algèbre de Hecke (car les opérateurs de Hecke sont auto-adjoints) et est donc lui-même un élément de l'algèbre de Hecke. Ainsi, puisque $\Theta = \varphi^{\otimes 3}(\Delta, \Delta)$,

$$\Theta_F = p_F(\varphi^{\otimes 3}(\Delta, \Delta)) = \varphi^{\otimes 3}(p_F \Delta, \Delta) = \varphi^{\otimes 3}(\Delta_F, \Delta),$$

où l'on a également noté p_F l'élément correspondant de \mathbb{B} . Or, d'après le point ii. de la proposition 5.27, puisque $\Delta_F \in \langle A_F \rangle$, $\varphi^{\otimes 3}(\Delta_F, \Delta) = \langle \Delta_F, \Delta \rangle^{\otimes 3} \cdot F = \langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3} \cdot F$.

ii. On sait qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}^\times$ tel que $\Delta_F = \mu A_F$, et

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\langle \Delta_F, A_F \rangle^{\otimes 3}}{\langle A_F, A_F \rangle^{\otimes 3}} \\ &= \frac{\langle \sum_i w_i^{-1} e_i^{\otimes 3}, a_f \otimes a_g \otimes a_h \rangle^{\otimes 3}}{\langle a_f, a_f \rangle \langle a_g, a_g \rangle \langle a_h, a_h \rangle} \\ &= \frac{\sum_i w_i^{-1} \langle e_i, a_f \rangle \langle e_i, a_g \rangle \langle e_i, a_h \rangle}{\langle a_f, a_f \rangle \langle a_g, a_g \rangle \langle a_h, a_h \rangle} = \frac{\sum_i w_i^2 \lambda_i(f) \lambda_i(g) \lambda_i(h)}{\langle a_f, a_f \rangle \langle a_g, a_g \rangle \langle a_h, a_h \rangle}, \end{aligned}$$

donc

$$\langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3} = \mu^2 \langle a_f, a_f \rangle \langle a_g, a_g \rangle \langle a_h, a_h \rangle = \frac{(\sum_i w_i^2 \lambda_i(f) \lambda_i(g) \lambda_i(h))^2}{(\sum_i w_i \lambda_i(f)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(g)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(h)^2)}$$

□

Remarque 5.30. Ce n'est pas le cadre du reste de mémoire, mais on peut remarquer que si l'on fixe $h = E$ dans le membre de droite du point ii. du théorème précédent, on obtient le terme (en appliquant la formule de masse d'Eichler [Voi21, p. 423, théorème 25.3.19])

$$\frac{(\sum_i w_i \lambda_i(f) \lambda_i(g))^2}{(\sum_i w_i \lambda_i(f)^2) (\sum_i w_i \lambda_i(g)^2) (\sum_i w_i^{-1})} = \frac{\langle a_f, a_g \rangle}{\langle a_f, a_f \rangle \langle a_g, a_g \rangle (\sum_i w_i^{-1})},$$

et donc si $f \neq g$, ce terme est nul, puisque deux formes propres normalisées distinctes sont orthogonales. En revanche, si $f = g$, alors on obtient à un rationnel près le terme

$$\frac{\langle a_f, a_f \rangle}{\langle a_f, a_f \rangle \langle a_f, a_f \rangle} = \frac{1}{\langle a_f, a_f \rangle} = \left(\sum_i w_i \lambda_i(f)^2 \right)^{-1},$$

que l'on peut interpréter comme le degré modulaire de la courbe elliptique associée à f dans le cas d'un niveau premier N .

5.3 La formule de Gross et Kudla

Des parties précédentes, on déduit la formule de Gross et Kudla.

Théorème 5.31. Lorsque $\prod_{p|N} \varepsilon_p$ (défini en 2.1) vaut 1, la valeur centrale de la fonction L associée au produit triple $F = f \otimes g \otimes h$ est donnée par

$$L(F, 2) = \frac{(F, F)}{2\pi N 2^t} \langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3},$$

où t est le nombre de diviseurs premiers de N et $(,)$ est le produit de Petersson normalisé suivant,

$$(F, G) = 2^9 \pi^6 \int_{\Gamma_0(N)^3 \backslash \mathfrak{h}^3} F(z) \overline{G(z)} (y_1 y_2 y_3)^2 d\mu(z).$$

Preuve. D'après les propositions 5.26 et 5.29, on a

$$L(F, 2) = \frac{1}{2^{1+t} \pi N} (F, \Theta) = \frac{1}{2^{1+t} \pi N} (F, \Theta_F) = \frac{(F, F)}{2\pi N 2^t} \langle \Delta_F, \Delta_F \rangle^{\otimes 3}.$$

□

Annexe : quelques calculs d'intégrales sur les corps locaux

Dans cette annexe, on calcule plusieurs intégrales élémentaires qui reviennent plusieurs fois dans les calculs de la partie 3, afin de ne pas avoir à les refaire ou à éviter d'aller les chercher ailleurs. Les mesures de Haar sont les mesures normalisées usuelles sur \mathbb{Q}_p et \mathbb{Q}_p^\times , et ψ est le caractère additif de \mathbb{Q}_p de conducteur \mathbb{Z}_p .

Tout d'abord,

Lemme 5.32. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{vol}(p^n \mathbb{Z}_p^\times, dx) = p^{-n}(1 - p^{-1}) \quad \text{et} \quad \text{vol}(B(0, p^n), dx) = p^{n-1},$$

où $B(0, p^n)$ désigne la boule ouvert de rayon p^n .

Preuve. Par translation, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{vol}(p^n \mathbb{Z}_p^\times, dx) = \int_{p^n \mathbb{Z}_p^\times} dx = \int_{p^n \mathbb{Z}_p^\times} |x| \frac{dx}{|x|} = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} |p^n x| \frac{dx}{|x|} = p^{-n} \text{vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx).$$

Or, on a $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigsqcup_{n \geq 0} p^n \mathbb{Z}_p^\times$, donc

$$\text{vol}(\mathbb{Z}_p, dx) = 1 = \sum_{n \geq 0} \text{vol}(p^n \mathbb{Z}_p^\times, dx) = \text{vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx) \sum_{n \geq 0} p^{-n} = \text{vol}(\mathbb{Z}_p^\times, dx)(1 - p^{-1})^{-1}.$$

D'autre part, puisque $B(0, p^n) = \bigsqcup_{k > -n} p^k \mathbb{Z}_p^\times$,

$$\text{vol}(B(0, p^n), dx) = \sum_{k > -n} \text{vol}(p^k \mathbb{Z}_p^\times, dx) = p^{n-1}$$

□

Lemme 5.33. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 0$.

$$\int_{|a| \leq p^n} |a|^s d^\times a = p^{ns}(1 - p^{-s})^{-1}.$$

Preuve. On a $p^{-n} \mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{m \geq -n} p^m \mathbb{Z}_p^\times$, donc

$$\int_{|a| \leq p^n} |a|^s d^\times a = \sum_{m \geq -n} p^{-ms} \text{vol}(p^m \mathbb{Z}_p^\times, d^\times a) = p^{ns}(1 - p^{-s})^{-1}.$$

□

Lemme 5.34. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 0$.

$$\int_{|x| > 1} \psi(x) |x|^{-s} dx = -p^{-s}$$

Preuve. On a $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{n > 0} p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times$, donc

$$\int_{|x| > 1} \psi(x) |x|^{-s} dx = \sum_{n \geq 1} p^{-ns} \int_{p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times} \psi(x) dx.$$

Or, ψ est de conducteur \mathbb{Z}_p , donc il existe $y \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|y| = p$ et $\psi(y) \neq 1$. En outre, pour $n > 1$, $p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times + y = p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times$, donc par translation,

$$\int_{p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times} \psi(x) dx = \int_{p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times} \psi(x) \psi(y) dx = \psi(y) \int_{p^{-n} \mathbb{Z}_p^\times} \psi(x) dx,$$

d'où $\int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times} \psi(x)dx = 0$. Ainsi,

$$\int_{p^{-2}\mathbb{Z}_p^\times} \psi(x)dx = 0 = \int_{|x|=p} \psi(x)dx + \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x)dx = \int_{|x|=p} \psi(x) + 1,$$

donc $\int_{|x|=p} \psi(x)dx = -1$. Par conséquent,

$$\int_{|x|>1} \psi(x)|x|^{-s}dx = \sum_{n \geq 1} p^{-ns} \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times} \psi(x)dx = -p^{-s}.$$

□

Bibliographie

- [BS95] Siegfried BÖCHERER et Rainer SCHULZE-PILLOT. *On the central critical value of the triple product L-function*. en. arXiv :math/9507218. Juill. 1995. URL : <http://arxiv.org/abs/math/9507218>.
- [Bum98] Daniel BUMP. *Automorphic forms and representations*. 55. Cambridge university press, 1998.
- [Cas73] William CASSELMAN. « On Some Results of Atkin and Lehner. » In : *Mathematische Annalen* 201 (1973), p. 301-314.
- [GK92] B. H. GROSS et S. KUDLA. « Heights and the central critical values of triple product L-functions ». In : *Compositio Mathematica* 81 (1992), p. 143-209.
- [Gro87] B.H. GROSS. « Heights and special values of L-series ». In : *CMS Conf. Proc.* 7 (1987), p. 115-187.
- [HK91] Michael HARRIS et Stephen S. KUDLA. « The Central Critical Value of a Triple Product L-Function ». In : *Annals of Mathematics* 133.3 (1991), p. 605-672.
- [Ich08] Atsushi ICHINO. « Trilinear forms and the central values of triple product L-functions ». In : *Duke mathematical journal* 145.2 (2008), p. 281-307.
- [JL70] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS. *Automorphic Forms on GL(2)*. T. 114. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer, 1970. DOI : 10.1007/BFb0058988.
- [Kna97] A.W. KNAPP. « Theoretical aspects of the trace formula for GL(2) ». In : *Representation Theory and Automorphic Forms : Instructional Conference, International Centre for Mathematical Sciences, March 1996, Edinburgh, Scotland*. Sous la dir. de T.N. BAILEY et A.W. KNAPP. Proceedings of symposia in pure mathematics. American Mathematical Society, 1997. ISBN : 978-0-8218-0609-8.
- [KR88] Stephen S. KUDLA et Stephen RALLIS. « On the Weil-Siegel formula. » In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 387 (1988), p. 1-68. ISSN : 0075-4102 ; 1435-5345/e. (Visité le 29/05/2024).
- [LW12] D. LOEFFLER et J. WEINSTEIN. « On the computation of local components of a newform ». In : *Mathematics of Computation* 81.278 (2012), p. 1179-1200.
- [Mes86] J.-F. MESTRE. « La méthode des graphes. Exemples et applications. » In : *Proceedings of the international conference on class numbers and fundamental units of algebraic number fields (Katata)* (1986), p. 217-242.
- [Piz80] Arnold PIZER. « An algorithm for computing modular forms on $\Gamma_0(N)$ ». In : *Journal of Algebra* 64.2 (1980), p. 340-390.
- [PR87] Ilya PIATETSKI-SHAPIRO et Stephen RALLIS. « Rankin triple L functions ». In : *Compositio Mathematica* 64.1 (1987), p. 31-115.
- [Sil09] J.H. SILVERMAN. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2009.
- [Vig80] M.F. VIGNÉRAS. *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*. Lect. Notes in Math. 800. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [Voi21] J. VOIGHT. *Quaternion Algebras*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2021. ISBN : 9783030566944.
- [Wat08] Thomas C. WATSON. « Rankin Triple Products and Quantum Chaos ». In : (2008). arXiv : 0810.0425 [math.NT].
- [Wei64] André WEIL. « Sur certains groupes d'opérateurs unitaires ». fr. In : *Acta Math.* 111.1 (juill. 1964), p. 143-211. ISSN : 1871-2509. DOI : 10.1007/BF02391012.